MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC

C. II.
VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS

ÍRTA:
DR. BAJCSAY PÁL

HARMADIK KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1969

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS

★

BELSŐ MUNKATÁRSAK:
DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

DR. BAJCSAY PÁL
EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

★

SZEMLÉLTETÉS:
GYURCSY ENDRE
OKL. VILLAMOSMÉRNÖK

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
K 045 533

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1969

A
MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK
SOROZAT KÖTETEI

A.

A. I. Középiskolai matematika (Ötödik kiadás)
A. II. Egyváltozós elemi függvények (Harmadik kiadás)
A. III. Differenciálszámítás (Harmadik kiadás)
A. IV. Határozatlan integrál (Negyedik kiadás)
A. V.* Határozott integrál (Első rész) (Második kiadás)
A. V.** Határozott integrál (Második rész)
A. VI. Többváltozós függvények és differenciálásuk (Második kiadás)
A. VII. Többváltozós függvények integrálása (Második kiadás)
A. VIII. Taylor-sorok (Harmadik kiadás)
A. IX. Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek (Negyedik kiadás)
A. X.* A logarléc (Negyedik kiadás)

B.

B. I—II—III. Vektoranalízis (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája. Skalár-, vektor- és tenzormezők) (Harmadik kiadás)
B. IV. Komplex függvénytan (Harmadik kiadás)
B. V. Numerikus és grafikus közelítő módszerek (Második kiadás)
B. VI. Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok (Második kiadás)
B. VII.* Közönséges differenciálegyenletek (Első rész) (Negyedik kiadás)
B. VII.** Közönséges differenciálegyenletek (Második rész) (Második kiadás)
B. VIII. Parciális differenciálegyenletek (Második kiadás)

C.

C. I. Operátorszámítás. Speciális függvények (Második kiadás)
C. II. Variációszámítás (Harmadik kiadás)
C. III. Integrálegyenletek (Második kiadás)
C. IV. Matrixszámítás (Harmadik kiadás)
C. V. Valószínűségszámítás (Második kiadás)
C. VI. Matematikai összefoglaló (Harmadik kiadás)
C. VII. Matematikai programozás (Második kiadás)

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk.)

C. II.

VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS

ÍRTA:

DR. BAJCSAY PÁL

EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

Harmadik kiadás

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

E KÖTET KÉZIRATÁT ÁTNÉZTE:
DR. BORBÉLY SAMU
AKADÉMIKUS

KÖRMENDI ISTVÁN

© *Dr. Fazekas Ferenc, dr. Bajcsay Pál, 1965*

Kiadását a művelődésügyi miniszter rendelte el

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy, a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter—Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben *dr. Alexits* akadémikus professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott, műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő alkalmazott műszaki anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

Munkánk A. és *B.** része jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkoztunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. E szerkesztési elvek legtapasztaltabb professzoraink helyeslésével találkoztak, továbbá egészen új szovjet példatárakban észleltünk többé-kevésbé hasonló szerkesztési elveket. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült a rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

Az *A. rész füzeteiben*, professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyaguk, mint az ismert példatáraké.

A *B.* és *C. rész füzeteiben* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva — nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területéről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

---

* A sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon!

Közismert tény, hogy a híressé vált külföldi példatárak legtöbbje évtizedek alatt számos kiadás folyamán forrt ki, tökéletesedett. E viszonylag újszerű célkitűzésekkel készülő példatár fiatal szerzői tehát érthetően sok-sok *észrevételt*, megjegyzést, tanácsot várnak és kérnek ezúton is az olvasóktól, hogy a sorozat kitűzött céljának minél hamarabb és minél teljesebb mértékben megfeleljen.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból*, sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem — példatárnál amúgy is szegényes sikert ígérő — eredetiségre. Természetesen szép számú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. villamosmérnök kolléga érdeme.

E sorozat megszületését megkönnyítette az a körülmény, hogy a minisztérium egyetemi tankönyvosztálya egy ilyen mű szükségességét, jelentőségét és elvi vonatkozásait igen világosan látta, és másokkal is meg tudta értetni.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről*, mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Köszönettel tartozom a *Tankönyvkiadó Vállalatnak*, különösképpen a *műszaki szerkesztőségnek*, mely értékes segítséget nyújtott nekünk e nyomdailag nagy követelményeket támasztó sorozat műszaki munkálataival kapcsolatban.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink tanszemélyzetének és hallgatóinak ajánljuk.* Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve az eredeti terv szerint — sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyr. növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak. Ez év nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai Kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetítettképes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemreméltó érdeklődés és elismerés mellett.

Most, a második kiadás során a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének — a megalkotásánál semmivel sem könnyebb — munkája vár ránk. Természetesen az első kiadás munkálatai során szerzett gazdag tapasztalataink, az újabb hazai és külföldi szakirodalom tanulmányozása, továbbá a könyveinkből kapott hazai és külföldi észrevételek jelentős segítségünkre lesznek. Remélhetőleg módunk lesz a műszaki matematikának néhány újabb diszciplínáját is feldolgozni a sorozatban.

Amikor munkaközösségünk változatlan céltudatosságáról és munkakedvéről biztosíthatom a magyar műszaki matematika híveit, egyben ismét kérem bírálóink, olvasóink valamint a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* további szakmai, erkölcsi és anyagi támogatását, nemkülönben az *Egyetemi Nyomda* ismert színvonalú munkáját.

Budapest, 1958 szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT HARMADIK KIADÁSÁHOZ

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása, a második kiadás lendületes folytatása mellett. A harmadik kiadás egyrészt olyan hagyományos, de széles körben érdekes tárgyú kötetekkel kezdődött meg, mint az A. I. és A. X., másrészt olyan modern alkalmazási területű és emiatt mindinkább keresetté vált kötetekkel mint az A. IX., B. I.—II.—III., B. IV. és B. VII.

Az említett második kiadások igen gyors elfogyása — éppen a matematikai programozás lineáris algebrai segédeszközeivel, ill. a síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytani módszerével kapcsolatos bővítés után — kézzelfoghatóan bizonyítja a sorozat második kiadásának előszavában kitűzött fejlesztési tervek és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítések helyességét.

E körülmény buzdítás munkaközösségünk részére és megnyugtatás a kiadó számára is, látván, hogy újabb áldozatai hasznos célt és reális igényeket szolgálnak.

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958 óta több újabb külországban (pl. a Szovjetunióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, USA-ban, Angliában, NSZK-ban) és nemzetközi fórumon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének nagy munkáját, ismét kérve ehhez a minisztérium, a kiadó és nem utolsósorban műszaki olvasótáborunk buzdító, áldozatkész támogatását.

Budapest, 1964. február. 15.

A SZERKESZTŐ

BEVEZETÉS

a) A variációszámítás tárgya és feladata

A matematikai analízis alapvető fogalma a *függvény* fogalma. Ezt *például* a következőképpen definiálhatjuk: Legyen X és Y a valós számoknak két halmaza. Ha valamilyen előírás az X halmazhoz tartozó minden x számhoz egy egyértelműen meghatározott és az Y halmazhoz tartozó y számot rendel hozzá, akkor azt mondjuk, hogy $y = f(x)$ az X halmazon értelmezett egyértékű függvény. Az X halmaz a függvény *értelmezési tartománya*, és az Y halmaz a függvény *értéktartománya*.

Könnyen belátható az, hogy a fenti definícióban szereplő „funkcionális hozzárendelés" lényegéhez nem tartozik hozzá szükségképpen az a megszorítás, hogy X és Y valós számok halmazai legyenek. Ha X-en és Y-on tetszőleges halmazokat értünk, a függvény fogalmának messzemenő általánosításához jutunk.

Tekintsük most a funkcionális hozzárendelésnek következő, általános definícióját:

Legyen X és Y két tetszőleges halmaz, és egy meghatározott előírás rendelje hozzá egyértelműen az X halmaz minden x eleméhez az Y halmaz egy meghatározott y elemét. Ekkor azt mondjuk, hogy $y = f(x)$ egy, az X halmazon értelmezett *absztrakt függvény* (vagy más néven *operáció* vagy *operátor*), melynek értéktartománya az Y halmaz. Ha speciálisan az operáció értékei valós számok, akkor az operációt *funkcionál*nak nevezzük. Az ezekkel foglalkozó analízis az ún. *funkcionálanalízis*.

A *variációszámítás* a funkcionálanalízisnek egyik fejezete, mely általában olyan speciális funkcionálok extrémum- (maximum-, illetve minimum-) feladataival foglalkozik, amelyekben az értelmezési tartománynak megfelelő halmaz elemei bizonyos, (általában) adott kerületi vagy egyéb feltételeket is kielégítő — amint mondani szokás, „konkurrenciába bocsátott"[1] — függvények; az értéktartománynak megfelelő halmaz elemei valós számok; a funkcionális hozzárendelés pedig a konkurrenciába bocsátott (egy- vagy többváltozós) függvények, ezeknek független változója (vagy változói) és egy vagy esetleg több (közönséges vagy parciális) deriváltja valamely meghatározott függvényének a független változó (változók) kijelölt intervallumára (tartományára) kiterjesztett határozott integrálja formájában van előírva. A feladat a legtöbb esetben az, hogy a konkurrenciába bocsátott függvények közül kiválasszuk azt, amellyel a szóban forgó határozott integrál (relatív) maximumot, vagy minimumot (egyszóval relatív extrémumot) vagy csak egyszerűen stacionárius értéket szolgáltat.[2] A feladatok egy részében még bizonyos meghatározott mellékfeltételek is ki vannak kötve. (Lásd még: 1. § *c*.)

[1] „Versenyre bocsátott" vagy „megengedett" függvények.

[2] A későbbiekben nem térünk ki az extrémum létezésének és az elégséges feltételeknek a vizsgálata. (Lásd az irodalmat.)

b) Néhány egyszerűbb variációs feladat

A következőkben példaként bemutatunk néhány egyszerűbb variációs feladatot.

1. Adva van az (x, y) síkban két pont: $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$, ahol $x_1 < x_2$. Tekintsük azokat a folytonos első deriválttal rendelkező $y = y(x)$ függvényekkel megadott görbéket, melyekre $y(x_1) = y_1$ és $y(x_2) = y_2$. Kérdés, hogy melyiknek az ívhossza a legkisebb.

A P_1 és P_2 pontokat összekötő görbeív hossza:

$$I\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

(Az $I\langle y\rangle$ szimbolum arra utal, hogy az I integrál értéke az y függvény megválasztásától függ.)

A feladat abban áll, hogy meghatározzuk azt az $(y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$ kerületi feltételeket kielégítő) $y = y(x)$ függvényt, amely az $I\langle y\rangle$ integrál minimumát szolgáltatja.

Az elemi geometriából tudjuk azt, hogy a keresett görbe, amelynek ívhossza minimális, a P_1 és P_2 pontot összekötő egyenesszakasz. Vagyis az $I\langle y\rangle$ integrál akkor veszi fel a legkisebb értéket, ha

$$y(x) = y_1 + m\,(x - x_1),$$

ahol

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

2. Az előző triviális problémánál valamivel általánosabb a következő: legyen megadva egy gömbfelület két nem átellenes pontja. Kérdés, hogy melyik az a gömbfelületen fekvő és a két adott pontot összekötő vonal, amelynek a legkisebb az ívhossza. Vagy mindjárt általánosan megfogalmazva a probléma a következő:

Legyen megadva az

$$f(x, y, z) = 0$$

egyenletű felület két pontja. Keressük azt, az adott pontokat összekötő felületi görbét, amelynek a legkisebb az ívhossza.

A további általánosítás kedvéért írjuk fel az adott felület paraméteres egyenletrendszerét:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

Az ívhosszdifferenciál (ívelem) négyzete:

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = E(u, v)\,(du)^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,(dv)^2,$$

ahol

$$E(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

(Ha a tömörebb írásmód kedvéért a felület paraméteres egyenletrendszerét az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$, kétparaméteres vektor-skalár függvénybe foglaljuk össze, akkor a fenti függvényeket, a felület ún. elsőrendű főmennyiségeit így írhatjuk röviden:

$$E = \mathbf{r}_u'^2, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \quad G = \mathbf{r}_v'^2.)$$

Ha a felület két adott pontját az (u_1, v_1) és (u_2, v_2) paraméterértékek határozzák meg $(u_1 < u_2)$ és a konkurrenciába bocsátott felületi görbék közül figyelmünket csak a

$$v = v(u) \qquad (\text{ahol } v(u_1) = v_1,\ v(u_2) = v_2)$$

egyenlettel kifejezhetőkre fordítjuk, akkor — figyelembe véve az ívhosszdifferenciál négyzetére fentebb felírt összefüggést — az ívhosszúságot az

$$I\langle v\rangle = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E(u, v) + 2F(u, v)\,v' + G(u, v)\,v'^2}\,du$$

integrál adja, amelyben $v' = \dfrac{dv}{du}$. Feladatunk mármost az, hogy meghatározzuk az $I\langle v\rangle$ integrált minimizáló $v = v(u)$ függvényt. Az ehhez a függvényhez tartozó felületi görbét nevezzük *geodetikus vonal*nak. (Lásd pl. *Sárközy P.*: Bevezetés a differenciálgeometriába. 137. o.)

A gömbfelület esetében a geodetikus vonal a gömbnek, a két adott gömbi pont és a gömb középpontja által meghatározott síkkal való metszése útján keletkező legnagyobb gömbi kör adott pontok közé eső ívdarabja.

3. Történetileg az első variációs probléma, amely általános érdeklődést keltett a matematikusok között, a Bernoulli Jánostól (1696) származó *„brachisztochron-probléma"* volt: Adva van egy függőleges síkban két (nem egy függőleges egyenesre eső) pont: P_1 és P_2. Pusztán a nehézségi erő hatására egy anyagi pont a P_1 pontból mozog a P_2 pont felé. Határozzuk meg azt a P_1-ből P_2-be vezető pályagörbét, amely mentén haladva az anyagi pont a legrövidebb idő alatt futja be a $\overset{\frown}{P_1P_2}$ utat.

(A „brachisztochron" elnevezés a görög „brachisztosz" = legrövidebb, és „chronosz" = idő szavak összetételéből származik.)

Tegyük fel, hogy a P_1 és P_2 pontok a függőleges (x, y) sík pontjai: $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$. Az y tengelyt irányítsuk függőlegesen lefelé, az x tengelyt pedig vízszintesen úgy, hogy $x_1 < x_2$ legyen. (Természetesen feltesszük továbbá azt is, hogy $y_2 < y_1$.) A keresett pályagörbét az egyelőre ismeretlen $y = y(x)$ függvény határozza meg, mely kielégíti az $y(x_1) = y_1$ és $y(x_2) = y_2$ kerületi feltételeket. Tegyük fel még azt is, hogy ismert az anyagi pont v_1 kezdősebessége (a P_1 pontban).

A pályasebességet a $v = \dfrac{ds}{dt}$ derivált határozza meg. Ebből

$$dt = \frac{ds}{v},$$

és a pálya befutásának ideje:

$$I\langle y\rangle = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v}\,dx.$$

Hogy a v sebességet mint a koordináták függvényét kifejezhessük, vegyük figyelembe, hogy a potenciális energia csökkenése egyenlő a mozgási energia növekedésével (súrlódástól eltekintünk!); vagyis, ha m az anyagi pont tömege, g a nehézségi gyorsulás, akkor

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = mg (y - y_1),$$

ahonnan

$$v = \sqrt{2g}\sqrt{y - y_0}, \quad \text{ahol} \quad y_0 = y_1 - \frac{v_1^2}{2g}.$$

(Világos, hogy $y_1 - y_0$ jelenti azt a függőleges távolságot, amit az anyagi pontnak zérus kezdősebesség esetén szabadesésben be kellene futnia ahhoz, hogy elérje a v_1 sebességet.)

Ezzel a pálya befutásának ideje:

$$I\langle y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y - y_0}}\, dx.$$

A feladat abban áll, hogy meghatározzuk azt az $y(x)$ függvényt, amellyel az $I\langle y\rangle$ integrál minimum lesz.

4. Legyen két rögzített pont: $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$, ahol $x_1 < x_2$, továbbá $y_1 > 0$, $y_2 > 0$. Az ezeken a pontokon áthaladó, $y = y(x)$ függvénnyel megadott görbe P_1 és P_2 közötti ívét megforgatjuk az x tengely körül: keletkezik egy forgásfelület. ($y(x)$-ről feltesszük azt, hogy az $x_1 \leqq x \leqq x_2$ intervallumban $y(x) \geqq 0$.)

A forgásfelület felszíne:

$$I\langle y\rangle = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Határozzuk meg azt az $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ kerületi feltételeket kielégítő $y = y(x)$ függvényt, amellyel $I\langle y\rangle$ minimum lesz. *(A legkisebb felszínű forgásfelület problémája.)*

c) Variációs feladatok általános megfogalmazása

Az előző pontban példákat láttunk a legegyszerűbb variációs feladatok közül. Most fogalmazzuk meg a legegyszerűbb feladatot általánosan:

1. *Határozzuk meg azt az*

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \qquad (x_1, x_2, y_1, y_2 \text{ adottak})$$

kerületi feltételeket kielégítő $y = y(x)$ függvényt, amelyik az

$$I\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$$

integrál extrémumát adja. (Itt és a következőkben f az argumentumainak adott és a független változó (illetve változók) szerint integrálható függvényét jelenti.)

E feladat egy általánosítására jutunk akkor, ha nemcsak egy $y(x)$, hanem két (vagy általában n) függvényt kell meghatároznunk:

2. *Határozzuk meg azokat az $y(x)$, $z(x)$ függvényeket, amelyek az $x = x_1$ és $x = x_2$ helyeken a megadott y_1, y_2, illetve a z_1, z_2 kerületi értékeket veszik fel és amelyek mellett az*

$$I\langle y, z\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, y', z')\,dx$$

integrál extrémális értéket vesz fel.

Egy másik általánosítás abban rejlik, hogy az integrálandó f függvényben az y és első deriváltja mellett fellépnek a magasabbrendű deriváltjai is:

3. *Határozzuk meg az*

$$I\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', y'')\,dx$$

integrál extrémumát adó $y(x)$ függvényt, mely az

$$y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2$$

$$y'(x_1) = y'_1,\ y'(x_2) = y_2 \qquad (x_1, x_2, y_1, y_2, y'_1, y'_2 \text{ adottak})$$

kerületi feltételeket kielégíti.

Bizonyos esetekben a konkurrenciába bocsátott $y(x)$ függvényekre — a kerületi feltételek mellett — közönséges egyenletek vagy differenciálegyenletek formájában *mellékfeltételeket* is szokás kiróni.

A mellékfeltétel speciális esetben, az ún. *izoperimetrikus feladat*oknál, határozott integrál formájában adott:

4. *Határozzuk meg azt az*

$$y(x_1) = y_1,\quad y(x_2) = y_2 \qquad (x_1, x_2, y_1, y_2 \text{ adottak})$$

kerületi feltételeket, és az

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y')\,dx = A \qquad (A \text{ megadott állandó})$$

mellékfeltételt kielégítő $y(x)$ függvényt, amelyik az

$$I\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx$$

integrál extrémumát adja.

Az előző 1—4. feladatokban a konkurrenciába bocsátott függvények egyváltozós függvények voltak. További általánosítást jelent, ha ezek a függvények két- vagy többváltozósak és az I integrál is kétszeres vagy többszörös. Pl.:

5. *Határozzuk meg azt a kétváltozós $u(x, y)$ függvényt, amelyik az*

$$I\langle u\rangle = \iint_T f(x, y, u, u_x, u_y)\,dx\,dy$$

kettős integrál extrémumát adja, és amelyik a T tartomány L határgörbéjén megadott értékeket vesz fel.

1. §. A LEGEGYSZERŰBB VARIÁCIÓS FELADATOK MEGOLDÁSA

a) A variációszámítás alaplemmája

A variációszámításban — bizonyos tételek, illetve megoldási módszerek levezetésénél — fontos szerepet játszik a következő alaplemma:

Legyen x_1 és x_2 két megadott állandó ($x_1 < x_2$) és $F(x)$ egy bizonyos, az $x_1 \leqq x \leqq x_2$ intervallumban folytonos függvény. Ha

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\, F(x)\, dx = 0$$

bármely folytonosan differenciálható $\eta(x)$ esetén, amelyikre fennáll, hogy

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0,$$

akkor

$$F(x) \equiv 0$$

az egész $x_1 \leqq x \leqq x_2$ intervallumban.

Tegyük fel ugyanis azt, hogy az állítás nem igaz, vagyis van legalább egy olyan $x = \xi$ hely ($x_1 < \xi < x_2$), amelynél $F(\xi) \neq 0$, pl. $F(\xi) > 0$. (Teljesen hasonlóan okoskodhatunk akkor is, ha feltesszük, hogy $F(\xi) < 0$.) De ekkor, mivel $F(x)$ folytonos, kell legyen a ξ-nek egy (bármilyen kicsiny, de véges) olyan környezete: $\xi - h = \xi_1 \leqq x \leqq \xi_2 = \xi + h$ ($h > 0$), ahol $F(x) > 0$. Akkor azonban az

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\, F(x)\, dx = 0$$

feltevés nem áll fenn minden, tetszőlegesen megválasztott folytonosan differenciálható $\eta(x)$ esetén. Mert ha pl.

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x_1 \leqq x \leqq \xi_1, \\ (x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2, & \text{ha } \xi_1 \leqq x \leqq \xi_2, \\ 0 & \text{ha } \xi_2 \leqq x \leqq x_2, \end{cases}$$

akkor az

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\, F(x)\, dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} (x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 F(x)\, dx$$

integrál ($F(x) > 0$ a $\xi_1 \leqq x \leqq \xi_2$ intervallumban !) határozottan pozitív. Ez pedig a feltevésünkkel ellentmondásban áll, tehát a lemmában foglalt állítás igaz.

Az alaplemmához hasonló állítás érvényes pl. a kétváltozós $F(x, y)$ függvényre:

Legyen T az (x, y) síknak a zárt L görbével határolt tartománya és $F(x, y)$ egy bizonyos, T-ben folytonos függvény. Ha

$$\iint_T \eta(x, y)\, F(x, y)\, dx\, dy = 0$$

bármely folytonosan differenciálható $\eta(x, y)$ esetén, amelyik az L görbe pontjaiban 0 értékű, akkor

$$F(x, y) \equiv 0$$

az egész T tartományban.

b) Az Euler–Lagrange-féle differenciálegyenlet

Tegyük fel, hogy van egy olyan, kétszer differenciálható $y = y(x)$ függvény, amely egyrészt kielégíti az

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

előírt kerületi feltételeket, másrészt pedig az

$$I\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$$

integrálnak extremális értékét adja. (Itt f az argumentumainak kétszer differenciálható, megadott függvénye.) Keressük az $I\langle y\rangle$ = *extrémum* szükséges feltételét.

Bocsássuk konkurrenciába a következő alakú, egyparaméteres $Y(x)$ függvénysereget:

$$Y = Y(x) = y(x) + \varepsilon\, \eta(x),$$

ahol $\eta(x)$ egy tetszőleges, folytonosan differenciálható függvény, mely eleget tesz az

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

kerületi feltételeknek, és ε a paraméter.

Az $\eta(x)$-re tett kikötés alapján nyilvánvaló, hogy

$$Y(x_1) = y(x_1) = y_1,$$
$$Y(x_2) = y(x_2) = y_2,$$

vagyis az $Y(x)$ függvények mindegyike ugyanazoknak a kerületi feltételeknek tesz eleget, mint $y(x)$; továbbá

$$Y' = Y'(x) = y'(x) + \varepsilon\, \eta'(x).$$

Bárhogyan is választjuk az $\eta(x)$ függvényt, az $I\langle y\rangle$ integrál extrémumát adó $y(x)$ függvény az $Y(x)$ függvénysereg egyik függvénye, mégpedig az $\varepsilon = 0$ paraméterértékhez tartozó függvény.

Helyettesítsük be $I\langle y\rangle$-ban y és y' helyére az $Y(x)$ és $Y'(x)$ fenti kifejezéseit, akkor az

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y')\, dx$$

integrál rögzített $\eta(x)$ mellett, nyilván az ε paraméter függvénye. Nyilvánvaló továbbá az is, hogy az az állítás, hogy $y(x)$ az $I\langle y\rangle$ integrál extrémumát adja, egyenértékű azzal, hogy $I(\varepsilon)$ az $\varepsilon = 0$ paraméterérték esetén extrémum.

Ily módon az integrál extrémumára vonatkozó feladatot visszavezettük egy közönséges extrémum-feladatra.

Annak a szükséges feltétele, hogy $I(\varepsilon)$ az $\varepsilon = 0$ paraméterérték esetén extrémum legyen, az, hogy

$$\left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = I'(0) = 0$$

legyen.

Alkalmazzuk a paraméteres integrál paraméter szerinti deriválására vonatkozó ismert szabályt (a tett feltevések szerint ez megengedett):

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{dY}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'}\frac{dY'}{d\varepsilon}\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\eta + \frac{\partial f}{\partial Y'}\eta'\right) dx.$$

Legyen most $\varepsilon = 0$, (ekkor $Y = y$ és $Y' = y'$), akkor az extrémum szükséges feltételét így fejezhetjük ki:

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'\right) dx = 0.$$

Az itt szereplő integrált átalakíthatjuk úgy, hogy az integrálandó összeg második tagját parciálisan integráljuk és figyelembe vesszük az előírt kerületi feltételeket:

$$I'(0) = \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\eta\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\eta\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\eta\, dx = 0.$$

Ebből pedig — a variációszámítás alaplemmája szerint — következik, hogy

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0.}$$

Ez az egyenlet az ún. *Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet*. Ha a második tagban kijelölt x szerinti totális deriváltat kiszámítjuk, nyerjük, hogy:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial y'}y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y'' = 0.$$

Innen látható, hogy az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet (általában) másodrendű. Mindazokat az $y(x)$ függvényeket, amelyek ezt a differenciálegyenletet kielégítik, a felvetett variációs problémához tartozó *extrémálisok*nak nevezzük. A felvetett variációs probléma megoldását ezek közül az extrémálisok közül kell kiválasztanunk. Az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet általános megoldása általában ilyen alakú:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2),$$

ahol C_1, C_2 integrálási állandók. Ezeket a megadott kerületi feltételekből kell meghatároznunk. A problémának akkor lehet csak megoldása, ha C_1- és C_2-re valós értékek adódnak az

$$y_1 = \varphi(x_1, C_1, C_2)$$
$$y_2 = \varphi(x_2, C_1, C_2)$$

egyenletrendszerből.

Hogy a felvetett variációs problémának egyáltalán van-e megoldása, azt a fentiekből még nem lehet megállapítani. Ehhez még további vizsgálat szükséges. Az $I'(0) = 0$ feltétel csak szükséges feltétele annak, hogy az $I\langle y\rangle$ integrálnak minimuma vagy maximuma legyen, de ez még nem elégséges feltétel. Elégséges feltételek megállapítására vonatkozó vizsgálatokkal azonban itt nem foglalkozunk. Megjegyezzük azonban azt, hogy az esetek többségében — a gyakorlatban előforduló variációs feladatoknál — magából a feladat természetéből közvetlenül belátható az, hogy van-e megoldás, mégpedig minimum vagy maximum. Egyébként pedig az irodalomra utalunk (pl. a *M. A. Lavrentyev—L. A. Ljusztyernyik:* Variációszámítás c. könyvre).

c) Szokásos elnevezések

Az

$$Y(x) - y(x) = \varepsilon\,\eta(x) = \delta y$$

és

$$Y'(x) - y'(x) = \varepsilon\,\eta'(x) = \delta y'$$

függvényeket *az $y(x)$, illetve $y'(x)$ függvények variációjának* szokás nevezni. A kerületi feltételek miatt nyilván

$$\delta y = 0, \quad \text{ha} \quad x = x_1 \quad \text{és} \quad x = x_2.$$

Az $y(x)$ függvény δy variációjának hasonló a szerepe az $I\langle y\rangle$ funkcionál vizsgálatánál, mint a független változó differenciáljának egy függvény vizsgálatánál.

A függvény variációjának értelmezése szerint a konkurrenciába bocsátott függvényeket így is írhatjuk:

$$Y(x) = y(x) + \delta y.$$

A variációs probléma megfogalmazásánál szereplő

$$I\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx$$

funkcionál a probléma *alapintegrálja*; az ebben szereplő integrálandó függvény pedig a variációs problémához tartozó *alkotófüggvény*.

Általában a variációs problémákban az alapintegrál *relatív extrémumát* (relatív szélsőértékét) vizsgáljuk: azt az $y(x)$ függvényt keressük, melynél $I\langle y\rangle$ maximum vagy minimum, az $y(x)$-től „kevéssé eltérő" függvényeknél felvett értékeihez viszonyítva. A „kevéssé eltérés" fogalma szempontjából azonban két esetet szokás megkülönböztetni:

1. ha $|\delta y|$ kicsiny, azonban $|\delta y'|$ tetszőleges, akkor az $y(x)$-nél adódó extrémumot *erős extrémum*nak (erős minimum vagy erős maximum) nevezzük;

2. ha ellenben $|\delta y|$ mellett $|\delta y'|$ is kicsiny, akkor *gyenge extrémum*ról (gyenge minimum, gyenge maximum) beszélünk.

Eszerint nyilvánvaló, hogy ha $I\langle y\rangle$-nak valamely $y(x)$ függvénynél erős extrémuma van, akkor ez egyben gyenge extrémum is; megfordítva azonban nem! Megjegyezzük azt, hogy mi a későbbiekben nem térünk ki az extrémum fenti megkülönböztetésének vizsgálatára. Hasonlóképpen nem foglalkozunk az $I\langle y\rangle$ abszolút extrémumával. E kérdések tekintetében az irodalomra utalunk.

A függvény variációja mellett szokás *az $I\langle y\rangle$ funkcionál (első) variációjáról* is beszélni. Ezt a következőképpen definiáljuk:

$$\delta I = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx = \varepsilon\, I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx.$$

Mivel a $\delta I = 0$ az $I\langle y\rangle$ = *extrémum*nak szükséges feltétele, a variációs feladatot gyakran az

$$I\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx = \text{extrémum}$$

helyett a

$$\delta I = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx = 0$$

alakban is szokás megfogalmazni.

Megjegyezzük még azt, hogy a funkcionál első variációja hasonló szerepet játszik az extrémum szükséges feltétele szempontjából, mint a függvények szélsőértékénél a függvény (totális) differenciálja.

d) Az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet első integrálja bizonyos speciális esetekben

Az alábbiakban megvizsgáljuk azt, hogy bizonyos speciális esetekben hogyan egyszerűsödik az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet megoldása.

1. Tegyük fel, hogy az $I\langle y\rangle$ integrálban szereplő f függvény *explicite nem tartalmazza az y függvényt.* Ez esetben nyilván $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, és így az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet egyszerűen a következő:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C_1;$$

ez pedig az extremálisokra egy elsőrendű differenciálegyenlet, mely csak y'-t és x-et tartalmazza.

Ha az f függvény még azonkívül, hogy y-t nem tartalmazza explicite, még x-et sem tartalmazza, akkor nyilván $\frac{\partial f}{\partial y'}$ csak y' függvénye, és így

$$y' = C_2,$$

ahol a C_2 állandó a C_1 állandónak valamilyen függvénye. Ez esetben tehát az extremálisok x-nek lineáris függvényei, az extremális görbék egyenesek. (Lásd pl. a *Bevezetés b)* pontjában a 2. példát.)

2. Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor f *explicite nem tartalmazza az* x *független változót.*

Nyilvánvaló az alábbi azonos átalakítás helyessége:

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f\right)=y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}y'=y'\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\right]-\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Ha most f explicite nem tartalmazza x-et, akkor $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, és így az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet — a fenti azonos átalakítás alapján beláthatóan — burkoltan a következő egyenletet tartalmazza:

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f\right)=0,$$

vagyis

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'}-f=C_1.$$

Tehát ez esetben az extremálisokat egy — csak az y-t és y'-t tartalmazó — elsőrendű differenciálegyenlet megoldásai adják. (Erre az esetre példa a brachisztochron-probléma. Ezt lásd az *e)* 4. pontban.)

3. Tegyük most fel azt a speciális esetet, hogy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=0.$$

Ez esetben nyilván f az y'-nak lineáris függvénye:

$$f(x,y,y')\equiv p(x,y)+q(x,y)\,y'.$$

Mivel most

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial y}y',$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=q,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y'}=\frac{\partial q}{\partial x}$$

és

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}=\frac{\partial q}{\partial y},$$

az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet a következő alakú:

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

vagyis

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Ha ez az egyenlőség nem azonosság, akkor egyetlen $y(x)$ függvényt határoz meg, amelyik azonban általában nem tesz eleget az előírt kerületi feltételeknek. Ez esetben tehát általában nincs megoldása a variációs problémának.

Ha viszont ez az egyenlőség azonosság, azaz

$$\frac{\partial p}{\partial y} \equiv \frac{\partial q}{\partial x},$$

akkor található egy olyan folytonosan deriválható kétváltozós $u(x, y)$ függvény, melynek totális differenciálja:

$$du = p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy \equiv f(x, y, y')\, dx.$$

Ekkor nyilván az

$$I\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx = \int_{x_1}^{x_2} du$$

integrál értéke független az $y(x)$ függvény megválasztásától, vagyis bármely — a kerületi feltételeket kielégítő — $y(x)$ mellett:

$$I \equiv u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1).$$

A fentiekből a következő következtetéseket vonhatjuk le:

1. Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy variációs probléma Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlete azonosan kielégüljön, az, hogy az $I\langle y\rangle$ integrálban szereplő $f(x, y, y')$ függvény egy bizonyos $u(x, y)$ függvény x szerinti totális deriváltja legyen:

$$f(x, y, y') = \frac{d}{dx} u(x, y).$$

Ha most még figyelembe vesszük azt, hogy az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet az f függvényben lineáris differenciálegyenlet, akkor mondhatjuk a következőket:

2. Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy additív tagnak az integrálandó függvényhez való hozzáadása ne változtassa meg az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenletet, az, hogy ez a tag egy $u(x, y)$ függvénynek az x szerinti totális deriváltja legyen.

e) Példák

1. *Geodétikus vonalak meghatározása.* A *Bevezetés b)* 2.-ben láttuk, hogy az

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

felület (u_1, v_1) és (u_2, v_2) pontjait összekötő geodétikus vonal meghatározásával kapcsolatos variációs feladatban

$$f = \sqrt{E + 2F v' + G v'^2}$$

az alkotófüggvény. Az ehhez tartozó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet:

$$\frac{\frac{\partial E}{\partial v} + 2v' \frac{\partial F}{\partial v} + v'^2 \frac{\partial G}{\partial v}}{2\sqrt{E + 2F v' + G v'^2}} - \frac{d}{du}\left(\frac{F + G v'}{\sqrt{E + 2F v' + G v'^2}}\right) = 0.$$

Abban a speciális esetben, amikor E, F *és* G *explicite csak az* u *paraméter függvényei*, akkor ennek egy első integrálja:

$$\frac{F + G v'}{\sqrt{E + 2F v' + G v'^2}} = C_1,$$

ahol C_1 az integrálási állandó.

Ha most még *feltesszük azt, hogy* $F = 0$, ami azt jelenti, hogy a felület $u =$ $=$ *állandó* és $v =$ *állandó* paramétervonalai merőlegesek egymásra, akkor végeredményben:

$$v = C_1 \int \frac{\sqrt{E}\, du}{\sqrt{G^2 - C_1^2 G}} + C_2.$$

A C_1 és C_2 integrálási állandókat abból a feltételből kell meghatározni, hogy a kapott függvényhez tartozó felületi görbének át kell mennie az adott két felületi ponton.

Abban a speciális esetben, amikor $F = 0$, *viszont* E *és* G *explicite csak a* v *paramétertől függnek*, akkor az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet egy első integrálja:

$$\frac{G v'^2}{\sqrt{E + G v'^2}} - \sqrt{E + G v'^2} = C_1,$$

és ebből végeredményben:

$$u = C_1 \int \frac{\sqrt{G}\, dv}{\sqrt{E^2 - C_1^2 E}} + C_2.$$

2. *A gömbfelület geodetikus vonalai.* Legyen a gömbfelület paraméteres egyenletrendszere:

$$x = R \sin v \cos u, \quad y = R \sin v \sin u, \quad z = R \cos v.$$

Ekkor

$$E = R^2 \sin^2 v, \quad F = 0, \quad G = R^2;$$

és így

$$u = C_1 \int \frac{R\,dv}{\sqrt{R^4 \sin^4 v - C_1^2 R^2 \sin^2 v}} = -\int \frac{-\frac{dv}{\sin^2 v}}{\sqrt{\left[\left(\frac{R}{C_1}\right)^2 - 1\right] - \operatorname{ctg}^2 v}} =$$

$$= -\arcsin \frac{\operatorname{ctg} v}{\sqrt{\left(\frac{R}{C_1}\right)^2 - 1}} + C_2,$$

ahonnan

$$(\sin C_2)\,(R \sin v \cos u) - (\cos C_2)\,(R \sin v \sin u) - \frac{R \cos v}{\sqrt{\left(\frac{R}{C_1}\right)^2 - 1}} = 0,$$

vagy figyelembe véve a felület paraméteres egyenletrendszerét:

$$x \sin C_2 - y \cos C_2 - \frac{z}{\sqrt{\left(\frac{R}{C_1}\right)^2 - 1}} = 0.$$

Vagyis a — paraméteres egyenletrendszerből láthatóan — origó-középpontú gömbfelület geodétikus vonalai, a gömbfelületnek az origóra illeszkedő síkkal való metszésvonalai: vagyis legnagyobb gömbi körök.

3. *Forgásfelület geodétikus vonalai.* Legyen a forgástengely a koordináta-rendszer z tengelye, és a meridiángörbe egyenlete: $z = g(x)$. Ekkor a felület egy paraméteres előállítása:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = g(u).$$

Ebből

$$E = 1 + g'^2(u), \quad F = 0, \quad G = u^2,$$

tehát a geodétikus vonalakat jellemző függvénykapcsolat:

$$v = C_1 \int \frac{\sqrt{1 + g'^2(u)}}{u\sqrt{u^2 - C_1^2}}\,du + C_2.$$

4. *A brachisztochron-probléma megoldása.* A *Bevezetés b)* 3.-ban láttuk, hogy a brachisztochron-problémával kapcsolatos variációs feladat alkotófüggvénye:

$$f = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y - y_0}},$$

nem tartalmazza explicite az x független változót, így az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet egy első integrálja:

$$\frac{y'^2}{\sqrt{(y - y_0)\,(1 + y'^2)}} - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y - y_0}} = C_1.$$

Ha ezt y'-re megoldjuk, a változókat szétválasztjuk és a $C_1 = (2a)^{-\frac{1}{2}}$ jelölést bevezetjük, integrálással nyerjük, hogy:

$$x = \int \frac{\sqrt{y - y_0}}{\sqrt{2a - (y - y_0)}}\, dy,$$

ahonnan az

$$y - y_0 = 2a \sin^2 \frac{t}{2}$$

helyettesítéssel adódik:

$$x = 2a \int \sin^2 \frac{t}{2}\, dt = a\,(t - \sin t) + x_0,$$

ahol a és x_0 a két integrálási állandó.

Így végeredményben a brachisztochron-probléma megoldását az

$$x = x_0 + a\,(t - \sin t)$$
$$y = y_0 + a\,(1 - \cos t)$$

paraméteres egyenletrendszerrel meghatározott ciklois adja.

5. *A legkisebb felszínű forgásfelület problémájának megoldása.* A *Bevezetés b)* 4.-ben láttuk, hogy a legkisebb felszínű forgásfelület problémájával kapcsolatos variációs feladat alkotófüggvénye:

$$f = y\sqrt{1 + y'^2},$$

nem tartalmazza explicite az x független változót, így az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet egy első integrálja:

$$y\sqrt{1 + y'^2} - \frac{y\,y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = a,$$

ahonnan

$$x = a \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = a \operatorname{ar\,ch} \frac{y}{a} + b,$$

illetve

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x - b}{a},$$

ahol a és b integrálási állandók.

Az integrálási állandók értékét az $y(x_1) = y_1$ és $y(x_2) = y_2$ kerületi feltételek alapján kell meghatároznunk. Azonban — részletesebb vizsgálat alapján belátható, hogy — a kerületi feltételeknek megfelelő —

$$y_1 = a \operatorname{ch} \frac{x_1 - b}{a}$$

$$y_2 = a \operatorname{ch} \frac{x_2 - b}{a}$$

egyenletekből nem kapunk minden esetben valós megoldást a-ra és b-re. Ezekkel a szinguláris (diszkontinuus megoldásokra vezető) esetekkel itt nem foglalkozunk.

f) **Több függő változó esete**

Jelölje $x = x(t)$, $y = y(t), \ldots, z = z(t)$ azokat a kétszer differenciálható függvényeket, amelyeknél az

$$I\langle x, y, \ldots, z\rangle = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, y, \ldots, z, \dot{x}, \dot{y}, \ldots, \dot{z})\, dt$$

integrál extrémum, és amelyek a t_1 és t_2 független változó értékeknél (ahol $t_1 < t_2$) előírt kerületi értékeket vesznek fel. Keressük azt a differenciálegyenlet-rendszert, melyet ezek a függvények kielégítenek.

Bevezetjük az

$$X(t) = x(t) + \varepsilon\,\xi(t),\ Y(t) = y(t) + \varepsilon\,\eta(t), \ldots, Z(t) = z(t) + \varepsilon\,\zeta(t)$$

egyparaméteres függvényseregeket, ahol ε a paraméter és $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ olyan — egyébként tetszőleges — folytonosan differenciálható függvények, amelyek eleget tesznek a

$$\xi(t_1) = \xi(t_2) = \eta(t_1) = \eta(t_2) = \ldots = \zeta(t_1) = \zeta(t_2) = 0$$

kerületi feltételeknek. Az ily módon konkurrenciába bocsátott $X, Y, \ldots, Z$ függvények az $\varepsilon = 0$ paraméterértéknél az előírt kerületi feltételeknek eleget tevő $x, y, \ldots, z$ extrémális függvényekbe mennek át. Vagyis az ε paramétertől függő

$$I(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, X, Y, \ldots, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \ldots, \dot{Z})\, dt$$

integrál az $\varepsilon = 0$ paraméterértéknél extrémum:

$$I(0) = \textit{extrémum}.$$

Ennek a szükséges feltétele az, hogy

$$I'(0) = 0$$

legyen.

A paraméteres integrál paraméter szerinti deriválására vonatkozó ismert szabály alapján

$$I'(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial X}\xi + \frac{\partial f}{\partial \dot{X}}\dot{\xi} + \frac{\partial f}{\partial Y}\eta + \frac{\partial f}{\partial \dot{Y}}\dot{\eta} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial Z}\zeta + \frac{\partial f}{\partial \dot{Z}}\dot{\zeta} \right) dt.$$

Ebből pedig az $\varepsilon = 0$ helyettesítéssel lesz:

$$I'(0) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\dot{\xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\dot{\eta} + \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial z}\zeta + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\dot{\zeta} \right) dt = 0.$$

Ez az egyenlet fennáll a $\xi(t), \eta(t), \ldots, \zeta(t)$ folytonosan differenciálható függvények bármilyen megválasztása esetén. Tehát abban a speciális esetben is, amikor $\eta, \ldots, \zeta$

azonosan 0-val egyenlők és $\xi(t)$ tetszőleges. De akkor az 1. § *b)* pontjában követett gondolatmenet alapján a

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

differenciálegyenletre jutunk. Teljesen hasonló eredményre jutunk a többi $(y, \ldots, z)$ függvényre vonatkozóan is. Úgyhogy végeredményben azt nyerjük, hogy a variációs probléma extrémálisainak meghatározására vonatkozó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet-rendszer a következő:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}\right) = 0.$$

g) Változtatható kerületi pontok

1. Keressük azt az

$$I\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$$

integrált extrémizáló kétszer differenciálható $y = y(x)$ függvényt, amelyre csak az $x = x_1$ helyen írunk elő meghatározott értéket:

$$y(x_1) = y_1,$$

az $x = x_2$ helyen azonban nem.

A konkurrenciába bocsátott függvények:

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\, \eta(x),$$

ahol $y(x)$ a keresett extrémális, ε a paraméter és $\eta(x)$ egy, az

$$\eta(x_1) = 0$$

kerületi feltételt kielégítő, tetszőleges, folytonosan differenciálható függvény.

Az

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y')\, dx$$

integrál az $\varepsilon = 0$ paraméterértéknél extrémum. Ennek szükséges feltétele, hogy

$$I'(0) = 0$$

legyen. Vagyis

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'\right) dx = 0.$$

Parciális integrálással — figyelembe véve az $\eta(x_1) = 0$ kerületi feltételt — ez még így is írható:

$$I'(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_{x=x_2} \cdot \eta(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \eta\, dx = 0.$$

Mivel ennek az egyenletnek fenn kell állnia minden olyan tetszőleges $\eta = \eta(x)$-re, mely kielégíti az $\eta(x_1) = 0$ feltételt, nyilván fennáll arra az $\eta = \eta(x)$-re is, mely eleget tesz az $\eta(x_2) = 0$ feltételnek is. De akkor ez esetben

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \eta \, dx = 0,$$

ahonnan — a variációszámítás alaplemmája szerint — következik a

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0}$$

Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet.

Ezt az eredményt figyelembe véve és most egy másik tetszőleges $\eta(x)$-et választva, az $I'(0) = 0$ egyenlet a következőre redukálódik:

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_{x=x_2} = 0.}$$

(Ez a *transzverzalitás feltételének* egy speciális alakja.)

Végeredményben tehát a feladat megoldása a következőképpen lehetséges:

1. Megoldjuk a feladathoz tartozó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenletet;
2. a differenciálegyenlet megoldásában szereplő integrálási állandókat az $y(x_1) = y_1$ és $\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_{x=x_2} = 0$ feltételek alapján meghatározzuk.

Teljesen hasonló eredményre jutunk akkor is, ha $y(x)$-re az $y(x_2) = y_2$ kerületi feltételt írjuk elő, csak most a második feltétel a következő lesz:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_{x=x_1} = 0.$$

Eredményünk alkalmazásaként vizsgáljuk meg a brachisztochron-problémának azt az esetét, amikor a mozgó anyagi pont a rögzített (x_1, y_1) pontból indul az $x = x_2$ függőleges egyenes felé. Ez esetben:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{(y - y_0)\,(1 + y'^2)}} = 0, \qquad \text{ha } x = x_2,$$

vagyis

$$y'(x_2) = 0.$$

Tehát a keresett extrémális-görbe egy olyan ciklois, amelyik az (x_1, y_1) pontból indul és az $x = x_2$ helyen vízszintes az érintője.

2. Keressük azt az

$$I\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx \qquad (x_1 < x_2)$$

integrált extrémizáló kétszer differenciálható $y = y(x)$ függvényt, amelyre előírjuk a következő két feltételt:

1. a rögzített $x = x_1$ helyen legyen $y(x_1) = y_1$,
2. az egyelőre határozatlan $x = x_2$ helyen $y(x)$ elégítse ki a

$$g(x, y) = 0$$

egyenletet.

A konkurrenciába bocsátott függvények:

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\,\eta(x),$$

ahol $y(x)$ a keresett extrémális, ε a paraméter és $\eta(x)$ egy, az

$$\eta(x_1) = 0$$

kerületi feltételt kielégítő, tetszőleges, folytonosan differenciálható függvény. Bármelyik konkurrenciába bocsátott $y = Y(x)$ függvényhez tartozó görbének és a $g(x, y) = 0$ egyenletű görbének a metszéspontja legyen az (X_2, Y_2) pont; speciálisan, az $\varepsilon = 0$ paraméterértékhez tartozó $y = y(x)$ extrémális esetében legyen ez a pont az (x_2, y_2) pont. Tehát:

$$g(X_2, Y_2) = 0, \quad Y_2 = y(X_2) + \varepsilon\,\eta(X_2).$$

Mivel ennek az összefüggésnek minden ε-ra teljesülnie kell, azért:

$$\frac{dg}{d\varepsilon} = \frac{\partial g}{\partial X_2}\frac{dX_2}{d\varepsilon} + \frac{\partial g}{\partial Y_2}\frac{dY_2}{d\varepsilon} =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial X_2}\frac{dX_2}{d\varepsilon} + \frac{\partial g}{\partial Y_2}\left[y'(X_2)\frac{dX_2}{d\varepsilon} + \eta(X_2) + \varepsilon\,\eta'(X_2)\frac{dX_2}{d\varepsilon}\right] = 0.$$

Legyen most $\varepsilon = 0$, akkor ebből adódik:

$$\left(\frac{dX_2}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = -\frac{\eta(x_2)\dfrac{\partial g}{\partial y_2}}{\dfrac{\partial g}{\partial x_2} + \dfrac{\partial g}{\partial y_2}y'(x_2)}.^{1}$$

Ezt az összefüggést az alábbiakban fel fogjuk használni.

Most vizsgáljuk az

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y')\, dx$$

integrált. Ez az $\varepsilon = 0$ paraméterértéknél extrémum, vagyis $I'(0) = 0$ kell, hogy legyen.

[1] Itt $\frac{\partial g}{\partial x_2}$, $\frac{\partial g}{\partial y_2}$ jelölik a $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ parciális deriváltaknak az $x = x_2$, $y = y_2$ helyen vett értékét.

Mivel

$$I'(\varepsilon) = \frac{dX_2}{d\varepsilon}(f)_{x=X_2} + \int_{x_1}^{X_2}\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\eta + \frac{\partial f}{\partial Y'}\eta'\right)dx,$$

azért ebből — parciális integrálás után — lesz:

$$I'(0) = \left(\frac{dX_2}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}(f)_{x=x_2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_{x=x_2}\eta(x_2) + \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\eta\,dx = 0.$$

Ha most figyelembe vesszük a $\left(\frac{dX_2}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$-ra fent kapott összefüggést, akkor nyerjük:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_{x=x_2} - \frac{\frac{\partial g}{\partial y_2}(f)_{x=x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial y_2}y'(x_2)}\right]\eta(x_2) + \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\eta\,dx = 0.$$

És ez fennáll bármelyik $\eta(x)$-re. Így az 1.-ben is követett gondolatmenet szerint végül azt kapjuk, hogy az $y = y(x)$ extrémális:

1. eleget tesz a

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Euler—Lagrange-féle differenciálegyenletnek;

2. kielégíti az

$$y(x_1) = y_1$$

egyik és a

3.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_{x=x_2} - \frac{\frac{\partial g}{\partial y_2}(f)_{x=x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial y_2}y'(x_2)} = 0$$

másik kerületi feltételt. (Ez a *transzverzalitás feltétele.)*

Teljesen hasonló eredményre jutunk akkor is, ha $x_1 > x_2$.

Eredményünket alkalmazva a brachisztochron-problémára, azt találjuk, hogy

$$-\frac{\frac{\partial g}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial y_2}} = -\frac{1}{y'(x_2)},$$

vagyis az $y = y(x)$ extrémális, az (x_1, y_1) ponton keresztülmenő ciklois, derékszög alatt metszi a $g(x, y) = 0$ görbét az (x_2, y_2) pontban. Tehát a transzverzalitás feltétele egyben ortogonalitást is eredményez ebben az esetben.

2. §. AZ IZOPERIMETRIKUS PROBLÉMA

a) **Az egyszerű és az általánosított izoperimetrikus probléma megoldása**

1. Keressük azt az

$$I\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$$

integrált extrémizáló kétszer differenciálható $y = y(x)$ függvényt, mely az előírt

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

kerületi feltételek mellett kielégíti az

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y')\, dx = A \qquad (A \text{ megadott állandó})$$

mellékfeltételt is. Az itt szereplő f és g függvények argumentumaik szerint kétszer differenciálhatók.

Az előírt mellékfeltétel miatt a konkurrenciába bocsátott $Y(x)$ függvényeknek legalább két paramétertől kell függeniök:

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon_1 \eta_1(x) + \varepsilon_2 \eta_2(x),$$

ahol $y(x)$ jelenti az extrémálist, ε_1 és ε_2 a paraméterek, $\eta_1(x)$ és $\eta_2(x)$ pedig tetszőleges, az

$$\eta_1(x_1) = \eta_1(x_2) = \eta_2(x_1) = \eta_2(x_2) = 0$$

kerületi feltételeket kielégítő, folytonosan differenciálható függvények.

Helyettesítsük be $Y(x)$-et a fenti két integrálba:

$$I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y')\, dx,$$

$$J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_1}^{x_2} g(x, Y, Y')\, dx = A.$$

Mivel A megadott állandó, nyilván ε_1 és ε_2 nem függetlenek egymástól. A

$$J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = A$$

egyenlet szabja meg a kettőjük között fennálló összefüggést.

$Y(x)$ fenti definíciójából következik, hogy $I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \textit{extrémum}$, ha $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$.

Ezzel a variációs feladatot visszavezettük egy kétváltozós függvény kötött szélsőérték-feladatára, melyre alkalmazzuk a Lagrange-féle multiplikátor módszerét. Bevezetjük az

$$I^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \lambda\, J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_1}^{x_2} f^*(x, Y, Y')\, dx$$

kétparaméteres függvényt, ahol

$$f^* = f + \lambda\, g.$$

Itt a λ állandó az ún. Lagrange-féle multiplikátor; értéke egyelőre határozatlan. A szélsőérték szükséges feltétele, hogy

$$\frac{\partial I^*}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial I^*}{\partial \varepsilon_2} = 0 \text{ legyen,} \qquad \text{ha } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.$$

Mivel

$$\frac{\partial I^*}{\partial \varepsilon_i} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f^*}{\partial Y}\, \eta_i + \frac{\partial f^*}{\partial Y'}\, \eta_i' \right) dx; \qquad \text{ahol } i = 1, 2,$$

azért

$$\left(\frac{\partial I^*}{\partial \varepsilon_i} \right)_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f^*}{\partial y}\, \eta_i + \frac{\partial f^*}{\partial y'}\, \eta_i' \right) dx = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Figyelembe véve az előírt kerületi feltételeket, ebből következik:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f^*}{\partial y'} \right) \right] \eta_i\, dx = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

végül a variációszámítás alaplemmája szerint:

$$\boxed{\frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f^*}{\partial y'} \right) = 0.}$$

Ennek — az adott feladathoz tartozó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenletnek — az általános megoldása három határozatlan állandót tartalmaz: két integrálási állandót és a λ Lagrange-féle multiplikátort. Ezeket az adott két kerületi feltételből és a feladathoz tartozó mellékfeltételből kell meghatároznunk.

2. Az izoperimetrikus feladatot általánosabban így fogalmazhatjuk: keressük azt az

$$I\langle y \rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$$

integrált extremizáló kétszer differenciálható $y = y(x)$ függvényt, mely az előírt

$$y(x_1) = y_1 \quad \text{és} \quad y(x_2) = y_2$$

kerületi feltételek mellett kielégíti az

$$\int_{x_1}^{x_2} g_k(x, y, y')\, dx = A_k; \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

(ahol A_k megadott állandókat jelent) mellékfeltételeket is.

Ezt a feladatot az előzőhöz teljesen hasonlóan kell megoldani, bevezetve az

$$f^* = f + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k$$

függvényt.

3. A fentiekhez hasonló módszer alkalmazható a következő, még általánosabb probléma megoldásánál:

Keressük az

$$I\langle x, y, \ldots, z\rangle = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, y, \ldots, z, \dot{x}, \dot{y}, \ldots, \dot{z})\, dt \quad (t_1 < t_2)$$

integrált extremizáló kétszer differenciálható $x(t)$, $y(t)$, ..., $z(t)$ függvényeket, amelyek a $t = t_1$ és $t = t_2$ helyeken előírt kerületi értékeket vesznek fel és kielégítik az

$$\int_{t_1}^{t_2} g_k(t, x, y, \ldots, z, \dot{x}, \dot{y}, \ldots, \dot{z})\, dt = A_k; \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

(ahol A_k megadott állandókat jelent) mellékfeltételeket is.

A feladat megoldásához bevezetjük az

$$f^* = f + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k$$

függvényt.

b) Példák

1. Keressük azt az adott L ívhosszúságú, önmagát nem metsző zárt síkgörbét, amelyik a legnagyobb területű síkrészt zárja körül.

Tegyük fel, hogy a keresett zárt görbe paraméteres egyenletrendszere:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \text{ahol } t_1 \leqq t \leqq t_2.$$

Legyen $x(t)$ és $y(t)$ folytonosan differenciálható. Mivel a görbe zárt, azért $x(t_1) = x(t_2) = x_0$ és $y(t_1) = y(t_2) = y_0$.

A görbe által körülzárt síkrész területe:

$$I\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt.$$

A görbe ívhossza:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = L.$$

A maximális területet adó $x(t)$, $y(t)$ függvényeknek ki kell elégíteniök a

$$\frac{\partial f^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f^*}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f^*}{\partial \dot{y}}\right) = 0$$

differenciálegyenlet-rendszert, ahol

$$f^* = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Tehát

$$\frac{1}{2}\dot{y} - \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}y + \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right) = 0,$$

$$-\frac{1}{2}\dot{x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right) = 0,$$

ahonnan integrálással adódik:

$$y - \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = C_1, \qquad x + \frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = C_2,$$

ahol C_1 és C_2 integrálási állandók.

Bevezetve a $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ deriváltat, azt kapjuk, hogy

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2,$$

tehát a keresett görbe kör. Mivel a kör középpontjának koordinátái tetszőlegesek, a C_1 és C_2 integrálási állandók határozatlanok. λ jelenti a kör sugarát, tehát $\lambda^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$, ahol L a megadott kerület.

2. Keressük azt az adott L ívhosszúságú síkgörbét, amelyik a koordináta-rendszer $(x_1, 0)$ és $(x_2, 0)$ pontjait köti össze ($x_1 < x_2$ és mindkettő határozatlan), és amelyik az x tengely x_1 és x_2 közötti darabjával együtt maximális területű síkrészt zár körül.

Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a keresett görbét az egyértékű és folytonosan differenciálható $y = y(x)$ függvény határozza meg. Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel továbbá azt, hogy az $(x_1, 0)$ pont rögzített, míg az $(x_2, 0)$ pont határozatlan.

A görbe és az x tengely közötti síkrész területe:

$$I\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx,$$

és a görbe ívhossza:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = L.$$

Bevezetjük az

$$f^* = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$$

függvényt. Ezzel a probléma Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlete:

$$1 - \lambda \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0,$$

ahonnan integrálással rögtön az adódik, hogy

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x - C_1,$$

ahol C_1 integrálási állandó.

A továbbiakban, a változókat szétválasztva, lesz:

$$dy = \pm \frac{x - C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2}}\, dx,$$

ahonnan

$$y = \mp \sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2} + C_2,$$

vagy

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \lambda^2.$$

A továbbiakban — alkalmazva az 1. § *g)* 2.-ben talált végeredményt (most $g(x, y) \equiv y = 0$) — nyerjük a következő feltételt az $(x_2, 0)$ pontban:

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}}{y'} = 0, \qquad \text{ha } x = x_2.$$

Ez még így is írható, figyelembe véve azt, hogy $y = 0$, ha $x = x_2$:

$$\lambda \left(\frac{-1}{y'\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0, \qquad \text{ha } x = x_2.$$

Mivel λ nem lehet 0, kell, hogy

$$\frac{1}{y'\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \qquad (\text{ha } x = x_2)$$

legyen, ami csak úgy lehetséges, hogy a keresett $y = y(x)$ függvényhez tartozó görbének az $x = x_2$ helyen az x tengelyre merőleges érintője van.

Végeredményben arra jutunk, hogy a keresett görbe egy $\frac{L}{\pi}$ sugarú félkör, amelynek a középpontja az x tengelyen van.

3. Függesszünk fel két rögzített pont (P_1 és P_2) között egy megadott $L \geqq P_1P_2$ hosszúságú, homogén és állandó keresztmetszetű *kötelet*, melyet csak a saját súlya

terhel. Határozzuk meg a kötél stabilis egyensúlyi alakját, figyelembe véve azt a (Dirichlettől származó) mechanikai tételt, mely szerint konzervatív[1] szkleronom[2] pontrendszer egyensúlyi helyzete akkor stabilis, ha a potenciális energia minimum. (L. pl. Budó: Mechanika, 174. o.)

Az egyensúlyi helyzetben függő kötél síkja legyen a koordináta-rendszer (x, y) síkja, melyben az x tengely vízszintes helyzetű és az y tengelyt függőlegesen felfelé irányítjuk. A felfüggesztési pontok: (x_1, y_1) és (x_2, y_2), ahol legyen $x_1 < x_2$. A kötél egyensúlyi alakját meghatározó függvény az ismeretlen $y = y(x)$ függvény. Tegyük fel, hogy a kötél hosszegységének a súlya: $\gamma = állandó$. A kötél potenciális energiája:

$$I\langle y\rangle = \gamma \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

A stabilis egyensúlyi helyzetre vonatkozó fenti minimum-elv alapján feladatunk meghatározni azt az

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

kerületi feltételeket és az

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = L$$

mellékfeltételt kielégítő $y = y(x)$ függvényt, amelynél az $I\langle y\rangle$ integrál minimum.

Bevezetjük az

$$f^* = \gamma y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$$

függvényt, amellyel a megoldandó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet

$$\gamma \sqrt{1 + y'^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{(\gamma y + \lambda) y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0.$$

Ebből közvetlenül adódik, hogy

$$(\gamma y + \lambda)\left(\frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - \sqrt{1 + y'^2}\right) = C_1,$$

ahol C_1 integrálási állandó, és innen végül

$$y = -\frac{\lambda}{\gamma} - \frac{C_1}{\gamma} \operatorname{ch} \frac{\gamma(x - C_2)}{C_1},$$

ahol C_2 is integrálási állandó.

A C_1, C_2 és λ állandókat a kerületi feltételekből és a mellékfeltételből kell meghatároznunk. Ez a feladat mindig megoldható, bár meglehetősen komoly numerikus számolási nehézségekkel jár.

[1] *Konzervatív pontrendszer*nél valamennyi szabaderő egy potenciálfüggvényből, a rendszer potenciális energiájából származtatható (mint annak a negatív gradiense).

[2] *Szkleronom pontrendszer*nél az előírt kényszerfeltételek nem tartalmazzák explicite az időt.

c) Variációs feladatok, egyenletek, illetve differenciálegyenletek formájában megadott mellékfeltételekkel

Keressük az

$$I\langle x, y, \ldots, z\rangle = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, y, \ldots, z, \dot{x}, \dot{y}, \ldots, \dot{z})\, dt \quad (t_1 < t_2)$$

integrált extremizáló n számú kétszer differenciálható $x(t)$, $y(t)$, $\ldots$, $z(t)$ függvényt, amelyek a $t = t_1$ és $t = t_2$ helyeken előírt kerületi értékeket vesznek fel és amellett eleget tesznek a

$$G_i(t, x, y, \ldots, z, \dot{x}, \dot{y}, \ldots, \dot{z}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N < n)$$

mellékfeltételeknek.

Itt nem részletezett okoskodással (l. pl. *R. Weinstock:* Calculus of variations, 57. o.) végeredményben azt találjuk, hogy az extremálisoknak ki kell elégíteniök a

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) = 0, \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\right) = 0$$

Euler—Lagrange-féle differenciálegyenleteket, ahol

$$F = f + \sum_{i=1}^{N} \mu_i(t)\, G_i$$

az egyelőre határozatlan $\mu_i(t)$ függvényekkel képezett alkotófüggvény. Az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet-rendszer a megadott N számú feltételi egyenlettel együtt meghatározza a keresett $x(t)$, $y(t)$, $\ldots$, $z(t)$ és a még határozatlan $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, ..., $\mu_N(t)$ függvényeket. Az integrálási állandókat pedig a megadott kerületi feltételek alapján kell meghatároznunk.

d) Alkalmazás az alkotófüggvényben elsőnél magasabbrendű deriváltat is tartalmazó variációs feladatok megoldására

1. Keressük azt az

$$I\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', y'')\, dx$$

integrált extremizáló $y(x)$ függvényt, amelyre y-nak és y'-nek az $x = x_1$ és $x = x_2$ helyeken felveendő kerületi értékeit előírjuk.

Ez a feladat visszavezethető a *c)* pontban tárgyalt általános esetre:

Keressük az

$$I\langle y, z\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, z')\, dx$$

integrált extremizáló $y(x)$ és $z(x)$ függvényeket, melyek az előírt kerületi feltételeken kívül eleget tesznek a

$$z - y' = 0$$

mellékfeltételnek is.

Bevezetjük az

$$F = f(x, y, z, z') + \mu(x)\,(z - y')$$

függvényt, ahol $\mu(x)$ egyelőre határozatlan.

Ezzel az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet-rendszer lesz:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d\mu}{dx} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \mu - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) = 0.$$

Ha ezekből kiküszöböljük a $\mu(x)$ függvényt és azután a mellékfeltételt kifejező egyenletből még z-t is, akkor nyerjük a

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) = 0}$$

Euler—Lagrange-féle differenciálegyenletet.

2. Általánosságban ugyanezzel az okoskodással jutunk a következő variációs feladat megoldását meghatározó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenletre:

Keressük az

$$I\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

integrált extremizáló $y(x)$ függvényt, amelyre y-nak és y első $(n-1)$ deriváltjának az $x = x_1$ és $x = x_2$ helyeken felveendő kerületi értékeit előírjuk.

Az ehhez a feladathoz tartozó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right) = 0.}$$

e) **Példák**

1. *Geodetikus vonalak differenciálegyenletei.* Keressük az

$$I\langle x, y, z\rangle = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

integrált extremizáló, folytonosan differenciálható $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ függvényeket, amelyek a $t = t_1$, $t = t_2$ helyeken $(t_1 < t_2)$ előírt kerületi értékeket vesznek fel és amelyek kielégítik a

$$G(x, y, z) = 0$$

mellékfeltételt.

Bevezetve a

$$F = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \mu(t)\, G(x, y, z)$$

függvényt, a *c)* pontban tárgyalt módszer alapján nyerjük a következő Euler—Lagrange-féle differenciálegyenleteket:

$$\mu\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{f}\right) = 0, \quad \mu\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{f}\right) = 0, \quad \mu\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{f}\right) = 0,$$

ahol

$$f = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \frac{ds}{dt}.$$

Ha innen a $\mu(t)$ függvényt kiküszöböljük, nyerjük a geodetikus vonalak következő differenciálegyenlet-rendszerét:

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{f}\right)}{\frac{\partial G}{\partial x}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{f}\right)}{\frac{\partial G}{\partial y}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{f}\right)}{\frac{\partial G}{\partial z}}$$

Figyelembe véve azt, hogy

$$f = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \frac{ds}{dt},$$

ezt még így is írhatjuk:

$$\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{\partial G}{\partial x}} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{\partial G}{\partial y}} = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{\partial G}{\partial z}},$$

ahonnan az a nevezetes tény olvasható ki, hogy a felület valamelyik pontjában a geodetikus vonal főnormálisa egybeesik a felület normálisával.

2. *Gömbfelület geodetikus vonalai.* (Lásd még: 1. § *e)* 2.) Legyen a gömbfelület egyenlete:

$$G(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Az előző példában tárgyalt módszer alapján, figyelembe véve azt, hogy

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = 2z,$$

nyerjük a következő differenciálegyenlet-rendszert:

$$\frac{f\ddot{x} - \dot{x}\dot{f}}{2xf^2} = \frac{f\ddot{y} - \dot{y}\dot{f}}{2yf^2} = \frac{f\ddot{z} - \dot{z}\dot{f}}{2zf^2}.$$

Ebből

$$\frac{\dot{f}}{f} = \frac{y\ddot{x} - x\ddot{y}}{y\dot{x} - x\dot{y}} = \frac{z\ddot{y} - y\ddot{z}}{z\dot{y} - y\dot{z}},$$

vagy

$$\frac{\frac{d}{dt}(y\dot{x} - x\dot{y})}{y\dot{x} - x\dot{y}} = \frac{\frac{d}{dt}(z\dot{y} - y\dot{z})}{z\dot{y} - y\dot{z}},$$

és innen integrálással:

$$\ln(y\dot{x} - x\dot{y}) = \ln(z\dot{y} - y\dot{z}) + \ln C_1,$$

ahol C_1 integrálási állandó.

Ezt az egyenletet rendezve, nyerjük:

$$y\dot{x} - x\dot{y} = C_1 (z\dot{y} - y\dot{z}),$$

illetve

$$\frac{\dot{x} + C_1 \dot{z}}{x + C_1 z} = \frac{\dot{y}}{y}.$$

Újból integrálva:

$$\ln (x + C_1 z) = \ln y + \ln C_2,$$

illetve

$$x - C_2 y + C_1 z = 0,$$

ahol C_2 is integrálási állandó.

Tehát a geodetikus vonalak a gömbfelületnek a középpontra illeszkedő síkkal való metszésével származó legnagyobb gömbi körök.

3. §. ALKALMAZÁS A GEOMETRIAI OPTIKÁBAN: A FERMAT-FÉLE ELV

a) **A fénytörésre vonatkozó Snellius- és Descartes-féle törvény mint a Fermat-féle elv következménye**

Az elemi optikából tudjuk azt, hogy abban az esetben, ha a fény útjában levő akadályok vagy nyílások méretei nagyok a fény hullámhosszához képest, akkor a hullámoptika helyett jó közelítésben az egyszerűbb geometriai optika törvényei alkalmazhatók. A fénysugarak útját a tapasztalattal megegyezésben adja meg, s így az egész geometriai optikát magában foglalja a fény hullámelméletéből levezethető *Fermat-féle elv*. Eszerint a tér két rögzített pontja között a fény mindig olyan pályán terjed, melyen a pálya befutásához szükséges idő minimum.

Fermat elvének közvetlen következménye az, hogy egy optikailag homogén közegben, két pont között a fény a két pontot összekötő egyenes mentén terjed. Mert hiszen, ha a közeg optikailag homogén, akkor nyilván e közegben állandó a fény terjedési sebessége, és így a két pontot összekötő pálya befutásához szükséges idő akkor minimum, ha a pálya a két pontot összekötő legrövidebb vonal, vagyis egyenes. Ha tehát a fény terjedését vizsgáljuk két tetszőleges, egymással érintkező és különböző, optikailag homogén közegben fekvő pont között, akkor a szóba jöhető fényutak csakis két-két egymáshoz csatlakozó olyan egyenesszakaszból összetettek lehetnek, amelyeknek a törőspontja a két közeg határán van.

A Fermat-féle elv alapján vizsgáljuk meg a homogén M_1 közegben fekvő (x_1, y_1) pontból a homogén M_2 közegben fekvő (x_2, y_2) pontba tartó fény útját, feltételezve azt, hogy a két közeg határát az $y = y_0$ egyenletű vonal jellemzi $(x_1 < x_2)$. A fénysebességek az egyes közegekben u_1, illetve u_2. Legyen a két közeg határán fekvő ama tetszőleges pont, melyben a két egyenesszakaszból összetett fényút megtörik, az (x, y_0) pont. A fénynek a két pontot összekötő út befutásához

$$T = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}}{u_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y_0)^2}}{u_2}$$

időre van szüksége.

A Fermat-féle elvvel összhangban a valóságos fényúthoz tartozó x értéket az jellemzi, hogy

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x - x_1}{u_1 \sqrt{(x - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}} - \frac{x_2 - x}{u_2 \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y_0)^2}} = 0,$$

vagy ha bevezetjük a két közeg határát jelentő vonal normálisával bezárt φ_1, illetve φ_2 szögeket, akkor ezt így is írhatjuk:

$$\frac{\sin \varphi_1}{u_1} = \frac{\sin \varphi_2}{u_2}.$$

Ez az összefüggés fejezi ki az ismert Snellius—Descartes-féle törvényt.

Most képzeljünk el n, keresztmetszetben tekintve párhuzamos sávokból összetett, egyenként optikailag homogén $M_1, M_2 \ldots, M_n$ közeget, amelyeknek egymással érintkező határfelületeit $y = állandó$ vonalak jellemzik. Jelölje u_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ az M_i közegben a fény terjedési sebességét. Tekintettel arra, hogy az egyes közegek határolóvonalait párhuzamosaknak tételeztük fel, az M_i közeg mindkét határvonalán a fénysugárnak a határolóvonal normálisával bezárt szöge φ_i lesz. Alkalmazva tehát a Snellius—Descartes-féle törvényt, írhatjuk:

$$\frac{\sin \varphi_1}{u_1} = \frac{\sin \varphi_2}{u_2} = \ldots = \frac{\sin \varphi_n}{u_n},$$

vagy röviden

$$\frac{\sin \varphi_i}{u_i} = K \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ahol K állandó érték bármelyik fényútra.

Vizsgáljunk most egy optikailag inhomogén, de izotrop M közeget, melyben a fény terjedési sebességét pl. az y koordináta folytonos

$$u = u(y)$$

függvényének tekintjük. (A közeg optikailag izotrop, vagyis a fénysebesség bármely pontban független attól, hogy a fényút milyen irányban halad át a ponton.) Ha most egy ilyen közegben akarjuk meghatározni a két tetszőleges pontot összekötő fényutat, akkor első közelítésben feltehetjük azt, hogy az inhomogén M közeg n párhuzamos sávból összetett: az egyenként optikailag homogén $M_1, M_2, \ldots, M_n$ közegekből, melyekben a fénysebesség $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Az u_i fénysebességet az i-edik M_i közeg két határvonala közötti valamelyik y koordináta-értékhez tartozó $u(y)$ függvényértékkel tesszük egyenlővé.

Ezzel a közelítéssel a fényútra egy, a két kiszemelt pontot összekötő törtvonal fog adódni, amelyik annál jobban közelíti meg a valóságos fényutat, minél keskenyebbek az egyes homogénnak feltételezett sávok, és így minél nagyobb a sávok száma: n. Határértékben $(n \to \infty)$ a Snellius—Descartes-féle törvényből adódik:

$$\frac{\sin \varphi}{u} = K,$$

ahol φ és u az y-nak folytonos függvényei; φ meghatározza bármely pontban a fényút érintőjének irányszögét.

Ha a fényutat az $y = y(x)$ függvény jellemzi, akkor, mivel $y'(x) = \operatorname{ctg} \varphi$, írhatjuk:

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

és így

$$\frac{1}{u\sqrt{1 + y'^2}} = K.$$

Ebből a differenciálegyenletből pedig adódik:

$$x = \pm K \int \frac{u\,dy}{\sqrt{1 - K^2 u^2}}.$$

Az integrálási állandót és a K állandót meghatározzák annak a két pontnak a koordinátái, amelyek között a fényutat éppen keressük.

b) A Fermat-féle elvnek és a variációszámításnak egyik kapcsolata

Az előző pontban, a Fermat-féle elv alapján levezettük a Snellius—Descartes-féle törvényt és megoldottuk a geometriai optikának azt a feladatát, hogy milyen pályán terjed a fény egy izotrop inhomogén közeg két pontja között, ha a fény terjedési sebessége az egyik koordinátának megadott folytonos függvénye. Ugyanezt a feladatot, a Fermat-féle elv közvetlen alkalmazásaként mint variációs feladatot is megfogalmazhatjuk: Legyen a fénysebesség az y koordinátának megadott $u = u(y)$ folytonos függvénye. Keressük az (x_1, y_1) és (x_2, y_2) pontok között a fényutat, figyelembe véve azt, hogy a fénynek a pálya befutásához

$$I\langle y\rangle = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{ds}{u} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{u(y)}\,dx$$

időre van szüksége és hogy a Fermat-féle elv alapján a fényutat az az $y = y(x)$ függvény határozza meg, amely az $I\langle y\rangle$ integrál minimumát adja és kielégíti az $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ kerületi feltételeket.

Az ehhez a variációs problémához tartozó alkotófüggvény:

$$f = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{u(y)}$$

nem tartalmazza explicite az x független változót, így az ehhez tartozó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet egy első integrálja:

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C_1,$$

azaz

$$\frac{y'^2}{u\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{u} = C_1,$$

illetve

$$\frac{1}{u\sqrt{1 + y'^2}} = -C_1.$$

Ha most figyelembe vesszük azt, hogy az integrálási állandót így is írhatjuk: $C_1 = -K$, akkor ebből az előző pont végén kapott eredményre jutunk:

$$x = \pm K \int \frac{u\,dy}{\sqrt{1 - K^2 u^2}}.$$

Ennek az egyezésnek a felismerése bizonyos feladatok megoldása szempontjából jelentős lehet. Az előző pontban ugyanis tulajdonképpen egy variációs feladatot oldottunk meg, egészen más módszerekkel, mint amelyek a variációszámításban szokásosak: „geometriai optikai módszerekkel". Ha mármost pl. egy bizonyos variációs feladatnál felismerhető a megfelelő analógia egy geometriai optikai feladattal, akkor annak megoldásánál más módszerek alkalmazhatók. Ez a helyzet pl. a brachisztochron-problémánál, ahol

$$f = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y - y_0)}} \qquad (g \text{ és } y_0 \text{ megadott állandók}),$$

tehát az

$$u(y) = \sqrt{2g(y - y_0)}$$

helyettesítéssel a brachisztochron-probléma megoldását az előző pontban tárgyalt geometriai optikai feladatra vezethetjük vissza. Mint történelmi érdekességet megemlítjük, hogy Bernoulli János a XVII. század végén ennek az analógiának a felismerése alapján, ezzel a módszerrel oldotta meg a brachisztochron-problémát.

4. §. ALKALMAZÁS A PONTRENDSZEREK MECHANIKÁJÁBAN

a) **Hamilton elve (1834)**

A mechanika legátfogóbb és éppen ezért legjelentősebb elve az ún. Hamilton-féle elv, melynek alapján analitikus módszerekkel levezethetők a mechanika legfontosabb törvényei. A Hamilton-féle elvből származtathatók a pontrendszereknek adott kezdeti feltételek és bizonyos kényszerfeltételek mellett létrejövő mozgásait meghatározó mozgásegyenletek. A Hamilton-féle elv variációs elv, s így az előbb említett mozgásegyenletek a variációszámítás módszereivel származtathatók.

Legyen egy n számú

$$m_1, m_2, \ldots, m_n$$

tömegű anyagi pontból álló mechanikai rendszer, melynél az egyes tömegpontok pillanatnyi helyzetét a $3n$ számú

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$$

derékszögű koordináták határozzák meg. Az egyes tömegpontokra ható erők ugyancsak derékszögű komponensei pedig legyenek:

$$X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \ldots, X_n, Y_n, Z_n.$$

Jelöléseinket egyszerűsítsük olyan módon, hogy a fenti koordinátákat és erőkomponenseket így jelöljük:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{3n-1}, x_{3n},$$
$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{3n-1}, X_{3n}$$

és a tömegeket pedig így:

$$m_1 \text{ helyett } m_1 = m_2 = m_3, \ldots, m_n \text{ helyett } m_{3n-2} = m_{3n-1} = m_{3n}.$$

Így a rendszer kinetikus energiája:

$$T = \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2.$$

Határozza meg a pontrendszer helyzetét a $t = t_1$ időpillanatban a $3n$ dimenziós tér $P_1(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{3n}^1)$ pontja, a $t = t_2$ időpillanatban pedig a $P_2(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{3n}^2)$ pont. A rendszer valóságos pályájának megfelel a $3n$ dimenziós tér P_1 és P_2 pontjait összekötő valamilyen görbe. Az ettől kissé különbözőnek gondolt pályák, az ún. variált pályák egyikét úgy kapjuk, hogy a valóságos pálya mindegyik $P(x_1, x_2, \ldots, x_{3n})$ pontjának x_i koordinátájához egy $\bar{x}_i$ koordinátát rendelünk. A hozzárendelés módja, másképpen a variálás módja, bizonyos fokig megállapodás dolga. Állapodjunk meg abban, hogy az időt nem variáljuk, vagyis ha $x_i = x_i(t)$, akkor ugyanazon t mellett $\bar{x}_i = \bar{x}_i(t)$. Továbbá, a variált pálya kezdő- és végpontja essék egybe a valóságos pálya

kezdő- és végpontjával, vagyis a határokon — a t_1 és t_2 időpillanatban — a koordinátákat ne variáljuk. A többi időpontban a $\delta x_i = \bar{x}_i(t) - x_i(t)$ koordináta-variációktól csak azt kívánjuk, hogy az előírt kényszerfeltételeknek tegyenek eleget, tehát a δx_i variációk tetszőleges virtuális elmozdulásokat jelentenek. Egyenletekben összefoglalva, legyen a variálás módja:

$$\delta t = 0,$$

$$\delta x_i\,(t_1) = \delta x_i\,(t_2) = 0,$$

$$\delta x_i\,(t) = \bar{x}_i\,(t) - x_i\,(t) \quad \text{tetszőleges virtuális elmozdulások.}$$

A fenti definíció alapján, ha az $x_i(t)$ és $x_i(t)$ függvények differenciálhatók, akkor a variált és a valóságos mozgás sebességét így írhatjuk:

$$\delta \dot{x}_i = \dot{\bar{x}}_i\,(t) - \dot{x}_i\,(t).$$

Egy tetszőleges

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, \ldots, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, t)$$

függvény variációját pedig így értelmezzük:

$$\delta\Phi = \sum_{i=1}^{3n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}_i}\delta\dot{x}_i\right). \qquad (\delta t = 0.)$$

Mármost az ún. *általánosított Hamilton-féle elvet* a következőképpen fogalmazhatjuk:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta T + \sum_{i=1}^{3n} X_i\,\delta x_i\right)dt = 0,$$

ahol δT a rendszer kinetikus energiájának a variációja, $\sum_{i=1}^{3n} X_i\,\delta x_i$ pedig a szabaderők virtuális munkája.

Mi a következőkben, ha csak egyszerűen Hamilton elvéről beszélünk, akkor ezen az előbbinek az alábbi, konzervatív rendszerekre vonatkozó alakját értjük:

Először is feltesszük azt, hogy a vizsgált rendszer konzervatív, vagyis a szabaderőknek van V potenciáljuk:

$$X_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

de akkor

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i\,\delta x_i = -\sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i = -\delta V,$$

amivel a fenti integrált így írhatjuk:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(T - V)\,dt = 0,$$

vagy másképpen

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T - V)\,dt = 0.$$

Ha még bevezetjük az

$$L = T - V$$

(kinetikai és potenciális energia különbsége), ún. *Lagrange-féle függvényt*, akkor írhatjuk:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0.$$

Így a *Hamilton-féle elvet* így fejezhetjük ki:

Konzervatív rendszer két helyzete között a valóságban bekövetkező mozgásnál a Lagrange-féle függvény ($L = T - V$) *idő szerinti integrálja extrémum:*

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)\,dt = \text{extrémum}$$

a szomszédos, az előzőkben adott definíció szerint variált pályákon felvett értékekhez viszonyítva. A kényszerfeltételek tetszőlegesek lehetnek.

Az

$$\int_{t_1}^{t} L\,dt$$

integrált szokás *principális függvény*nek vagy *hatásfüggvény*nek nevezni, az elvet pedig sokan a legkisebb hatás Hamilton-féle elvének nevezik, bár ez az integrál nem feltétlenül minimum. („Hatáson" energia szorozva idővel dimenziójú mennyiséget értünk.)

Megjegyezzük azt, hogy ha a valóságos pályát olyan szomszédos pályákkal hasonlítjuk össze, amelyek a kényszerfeltételeket kielégítik, akkor a fenti elv csak ún. holonom rendszerekre[1] érvényes.

Hamilton elve a pontrendszerek mechanikáján túlmenően az egész fizikában nagy jelentőségű, amennyiben számos általános törvény belőle mint alapelvből levezethető. A pontrendszerek mechanikájában főleg abban rejlik a jelentősége, hogy megfogalmazásánál a koordináták explicite nem szerepelnek benne. A kinetikus és a potenciális energiát — mint a koordináták megválasztásától független jelentésű fizikai mennyiségeket — bármilyen koordináta-rendszerben kifejezhetjük, s ha ezt megtettük, a Hamilton-féle elv alapján a variációszámítás módszereivel a mozgásegyenleteket közvetlenül felírhatjuk. Hasonló okokból törekszik a modern fizika arra, hogy alaptörvényeit lehetőleg variációs elvek alakjában fejezze ki.

Az n tömegpontból álló pontrendszer esetén a Hamilton-elvben foglalt variációs feladathoz tartozó Euler—Lagrange-féle egyenletek konzervatív szabad rendszer esetén a

$$\frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0, \quad \text{vagy} \quad m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 3n)$$

Newton-féle mozgásegyenletek.

[1] *Holonom rendszer*nél a kényszerfeltételek a helykoordináták és az idő között felírt egyenletekkel vannak megadva. (Lásd még 4. § *b*).)

Az

$$a_{k1}\dot{x}_1 + a_{k2}\dot{x}_2 + \ldots + a_{k3n}\dot{x}_{3n} + a_{k0} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

ké nyszerfeltételek esetén pedig az

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + \lambda_1 a_{1i} + \ldots + \lambda_r a_{ri} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 3n)$$

ún. *Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenletek.*

b) Generalizált koordináták

Sok problémát jelentékenyen egyszerűsíthetünk, ha derékszögű koordináták helyett olyan koordinátákat választunk, amelyekkel a kényszerfeltételek kiküszöbölhetők. Tegyük fel azt, hogy az r számú kényszerfeltétel *holonom*, vagyis

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_{3n}, t) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

alakú. (Ebben az esetben az

$$a_{k1}\dot{x}_1 + a_{k2}\dot{x}_2 + \ldots + a_{k3n}\dot{x}_{3n} + a_{k0} = 0$$

kifejezések bal oldalai teljes differenciálok; $a_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$, ahol $i = 1, 2, \ldots, 3n$, és $a_{k0} = \frac{\partial f_k}{\partial t}$. Ha ezek a kifejezések nem teljes differenciálok, akkor beszélünk *anholonom* kényszerfeltételekről. Ezekkel itt nem foglalkozunk.) Ekkor a rendszer $3n$ derékszögű koordinátája közül csak $3n - r$ független egymástól, vagyis — amint mondani szokás — a rendszer *szabadsági fokainak száma:*

$$\nu = 3n - r.$$

Az olyan ν számú, egymástól független

$$q_1, q_2, \ldots, q_\nu$$

adatot, melyek a rendszer helyzetét (konfigurációját) teljesen meghatározzák, *generalizált koordinátáknak* hívjuk.

A generalizált koordináták idő szerinti differenciálhányadosai az ún. *generalizált sebességkoordináták:*

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\nu.$$

Ezek a generalizált koordináták nem feltétlenül hosszúság-, illetve lineáris sebességdimenziójúak.

Mivel a q_i-k a rendszer helyzetét teljesen meghatározzák, a derékszögű koordináták a q_i-kal kifejezhetők, vagyis az x_i-k a q_i-k ismert és egyértékűnek feltételezett függvényei:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 3n)$$

Ezek a függvények a t időt explicite csak akkor tartalmazzák, ha a kényszerfeltételek az időtől függenek *(reonom* kényszerfeltételek; szemben az időtől független, ún. *szkleronom* feltételekkel).

A derékszögű sebességkomponensek:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu}\dot{q}_\nu + \frac{\partial x_i}{\partial t}; \quad i = 1, 2, \ldots, 3n$$

c) A Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek konzervatív holonom rendszereknél

Legyen a vizsgált pontrendszer konzervatív holonom. A Hamilton-féle elvet kifejező integrálban szereplő Lagrange-féle függvényt a generalizált koordináták, sebességkomponensek és az idő ismert függvényének tekinthetjük:

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_\nu, t).$$

(Megjegyezzük, hogy ha speciálisan a kényszerfeltételek az időt explicite nem tartalmazzák, vagyis a vizsgált rendszer szkleronom, tehát $\frac{\partial x_i}{\partial t} = 0$ minden i-re, akkor L az időtől explicite nem függ, a rendszer T kinetikus energiája pedig a $\dot{q}_i$ sebességkomponensek homogén kvadratikus alakja, melynek együtthatói csak a q_i generalizált koordináták függvényei.)

Ha most ezzel a Lagrange-féle függvénnyel képezzük a Hamilton-elvhez mint variációs feladathoz tartozó Euler—Lagrange-féle egyenleteket, jutunk a

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu}$$

ún. *Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletekre.*

d) A Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek nem konzervatív holonom rendszereknél

Legyen a vizsgált pontrendszer nem kozervatív holonom. Ebben az esetben az általánosított Hamilton-elvből kell kiindulnunk:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta T + \sum_{i=1}^{3n} X_i\, \delta x_i\right) dt = 0.$$

Generalizált koordinátákkal és sebességkomponensekkel a kinetikus energia variációja:

$$\delta T = \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k\right).$$

Az integranduszban szereplő második tagnak, a szabaderők virtuális munkájának kifejezésére vegyük figyelembe azt, hogy

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, 3n)$$

és vezessük be a

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = G_k = G_k(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\nu, t)$$

mennyiségeket, az ún. *generalizált erőkomponenseket.* (Ezeknek a generalizált erőkomponenseknek a dimenziója a generalizált koordináták dimenziójához igazodik,

úgy, hogy a $G_k q_k$ szorzat munkadimenziójú legyen !) Ekkor a szabaderők virtuális munkáját így írhatjuk:

$$\sum_{k=1}^{\nu} G_k \, \delta q_k .$$

Mindezek figyelembevételével az általánosított Hamilton-elvet kifejező integrált így írhatjuk:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{\nu} \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} + G_k \right) \delta q_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right\} dt = 0,$$

vagy az integrálandó utolsó tagját parciális integrálással átalakítva és a kerületi feltételeket figyelembe véve:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} + G_k - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = 0.$$

Ebből pedig a variációszámítás alaplemmája szerint következnek a holonom, de nem feltétlenül konzervatív rendszerekre vonatkozó Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = G_k, \; k = 1, 2, \ldots, \nu.}$$

e) A Hamilton-féle kanonikus egyenletek

A következőkben olyan holonom mechanikai rendszert vizsgáljunk, mely vagy konzervatív, vagy ha nem is az, akkor is található olyan (ún. általánosított potenciál)

$$V^*(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_\nu, t)$$

függvény, melyből a G_i generalizált erőkomponensek így származtathatók:

$$G_i = -\frac{\partial V^*}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V^*}{\partial \dot{q}_i}.$$

Tehát a vizsgált rendszer olyan, amelyre a Lagrange-féle mozgásegyenletek a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

alakban érvényesek, ahol

a) holonom konzervatív rendszernél: $L = T - V$;

b) holonom nem konzervatív rendszernél: $L = T - V^*$.

A következő kérdés, ami fölmerül, az az, hogy hogyan lehet ezeket a mozgásegyenleteket integrálni. Anélkül, hogy az erre vonatkozó (Hamilton, Jacobi, Osztrogradszkij vizsgálatai nyomán kialakult) elmélet részleteibe belemennénk, néhány speciális esetet fogunk vizsgálni.

Mindenekelőtt a

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

összefüggéssel definiált p_i *generalizált impulzuskoordinátákat* vezetjük be a $\dot{q}_i$ generalizált sebességkoordináták helyett. A definiáló egyenlet alapján a $\dot{q}_i$ sebességek a p_i impulzusok függvényeinek tekinthetők, és megfordítva.

Ezekkel az impulzusokkal a Lagrange-féle másodfajú egyenletek a következő alakot öltik:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

A fentiek figyelembevételével, képezzük az L Lagrange-féle függvény teljes differenciálját:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t}\,dt + \sum_{i=1}^{\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\,dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,d\dot{q}_i\right) = \frac{\partial L}{\partial t}\,dt + \sum_{i=1}^{\nu}(\dot{p}_i\,dq_i + p_i\,d\dot{q}_i).$$

Ezt megfelelő átrendezéssel így is írhatjuk:

$$d\left(\sum_{i=1}^{\nu} p_i\,\dot{q}_i - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}\,dt - \sum_{i=1}^{\nu}(\dot{p}_i\,dq_i - \dot{q}_i\,dp_i).$$

A jobb oldal tehát teljes differenciálja a

$$H = H(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, p_1, p_2, \ldots, p_\nu, t) \equiv \sum_{i=1}^{\nu} p_i\,\dot{q}_i - L,$$

ún. *Hamilton-féle függvény*nek. Figyelembe véve azt, hogy

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t}\,dt + \sum_{i=1}^{\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\,dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\,dp_i\right) = d\left(\sum_{i=1}^{\nu} p_i\,\dot{q}_i - L\right),$$

azért egyrészt $\dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t}$, másrészt:

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Ezek, az ún. *Hamilton-féle kanonikus egyenletek*, láthatóan elsőrendű közönséges differenciálegyenletek a meghatározandó $q_i(t)$, $p_i(t)$ függvények számára, szemben a Lagrange-féle másodrendű differenciálegyenletekkel. A Hamilton-féle egyenletek egyértékűek a Lagrange-félékkel, de szimmetriájuk folytán számos problémánál egyszerűbben alkalmazhatók. Innen ered a kanonikus elnevezés. A p_i-t a q_i-hez *kanonikusan konjugált* impulzusnak, a q_i, p_i változópárt *kanonikus változók*nak is hívják.

A mechanikai rendszer $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$ koordinátáit úgy tekinthetjük, mint a ν dimenziós ún. *konfigurációs tér* egy pontjának derékszögű koordinátáit, a $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ impulzusokat pedig úgy, mint a ν dimenziós, ún. *impulzustér* egy pontjának derékszögű koordinátáit. Azt a 2ν dimenziós teret, amelyben egy pont derékszögű koordinátái $q_1, q_2, \ldots, q_\nu, p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, *fázistér*nek hívjuk. Míg tehát a rendszer pillanatnyi helyzetének a konfigurációs tér egy pontja, pillanatnyi sebességállapotának pedig az impulzustér egy pontja felel meg, addig a rendszer teljes állapotát a t időpillanatban a fázistér egy pontja: a *fázispont* szemlélteti.

A H Hamilton-féle függvény jelentését általános esetben a

$$H = \sum_{i=1}^{\nu} p_i \dot{q}_i - L$$

definíció adja, s így a meghatározása sokszor nehéz feladat. A leggyakrabban előforduló konzervatív és egyúttal szkleronom rendszereknél azonban H-nak igen egyszerű mechanikai jelentése van. Konzervatív rendszernél $L = T - V$. Ha még a rendszer szkleronom is, akkor egyrészt V csak a q_i-któl függ, másrészt T a $\dot{q}_i$-ok homogén kvadratikus alakja. Így

$$2T = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{\nu} p_i \dot{q}_i,$$

tehát

$$H = \sum_{i=1}^{\nu} p_i \dot{q}_i - L = 2T - (T - V) = T + V.$$

Konzervatív és szkleronom rendszernél a Hamilton-féle függvény a kinetikus és a potenciális energia összege, vagyis a teljes mechanikai energia.

Ha a Hamilton-féle függvény az időtől explicite nem függ, akkor

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

és így

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, p_1, p_2, \ldots, p_\nu) = \text{állandó}$$

a mozgásegyenletek egy integrálja; speciálisan konzervatív szkleronom rendszereknél

$$T + V = \text{állandó}.$$

Azt a q_k generalizált koordinátát, mely a H Hamilton-féle függvényben explicite nem fordul elő, *ciklikus koordináta*nak hívjuk. A

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$$

egyenletből

$$p_k = \text{állandó},$$

vagyis *a ciklikus koordinátához konjugált impulzus állandó*. Ez a mozgásegyenletek egy integrálja. Általánosan a ciklikus koordináta — konzervatív rendszernél — azt jelenti, hogy a rendszer H teljes mechanikai energiája ennek a koordinátának a megváltoztatásával szemben érzéketlen. Így sok esetben ciklikus a rendszernek — mint

egésznek — valamilyen tengely körüli forgását leíró koordináta; innen származik a ciklikus elnevezés.

Ha valamennyi koordináta ciklikus, vagyis H csak az impulzusoktól és az időtől függ explicite:

$$H = H(p_1, p_2, \ldots, p_\nu, t),$$

akkor a kanonikus egyenletek azonnal teljesen integrálhatók, a mechanikai probléma megoldása közvetlenül felírható. Ekkor ugyanis

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \equiv \omega_i(t),$$

ahol az $\omega_i(t)$-k a p_i-k állandósága miatt csak a t ismert függvényei, és így

$$p_i = C_i, \quad q_i = \int \omega_i(t)\, dt + k_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

ahol C_i és k_i az integrálási állandókat jelentik.

f) Kanonikus transzformációk Vezessünk be a

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu, P_1, P_2, \ldots, P_\nu, t) \\ p_i &= p_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu, P_1, P_2, \ldots, P_\nu, t) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

összefüggésekkel új Q_i koordinátákat és új P_i impulzusokat.

Ettől az ún. *kanonikus transzformációtól* azt követeljük, hogy a segítségükkel bevezetett új Q_i, P_i változókra is fennálljanak a kanonikus egyenletek. Ennek szükséges és elégséges feltétele az, hogy a régi q_i, p_i változókkal kifejezett Hamilton-féle elv:

$$\int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} p_i \dot{q}_i - H(q_1, \ldots, q_\nu, p_1, \ldots, p_\nu, t) \right\} dt = \textit{extrémum}$$

kell, hogy legyen. Hogy ez valóban fennálljon, ahhoz nem szükséges, hogy a két integrálban az integranduszok egyenlők legyenek, hanem csak az, hogy legfeljebb egy tetszőleges S függvény idő szerinti teljes differenciálhányadosában különbözzenek egymástól, ahol S pl. a $q_1, q_2, \ldots, q_\nu, Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu, t$ változóknak tetszőleges, folytonosan differenciálható függvénye. Vagyis

$$\sum_{i=1}^{\nu} p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{\nu} P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dS}{dt}.$$

Figyelembe véve azt, hogy

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right),$$

ezt az előző egyenletet így írhatjuk:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \left(p_i - \frac{\partial S}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{\nu} \left(P_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i + \left(K - H - \frac{\partial S}{\partial t} \right) = 0.$$

Ez pedig teljesül, ha fennállnak az alábbi egyenletek:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i}, \quad K = H + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

g) A Hamilton–Jacobi-féle parciális differenciálegyenlet

A kanonikus transzformációk megismerésével a mechanikai probléma megoldásának, illetve a kanonikus egyenletek integrálásának kérdését így is megfogalmazhatjuk: Lehet-e a tetszés szerinti S, ún. alkotófüggvény alkalmas megválasztásával olyan kanonikus transzformációt találni, hogy valamennyi új koordináta ciklikus legyen?

Ha a q_i, p_i kanonikus változókról egy

$$S = S(q_1, q_2, \ldots, q_\nu, Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu, t)$$

alkotófüggvényből leszármaztatott

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i}$$

transzformációval áttérünk az új P_i, Q_i változókra, ezekre a

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

kanonikus egyenletek érvényesek, ahol az új Hamilton-féle függvény:

$$K(Q_1, \ldots, Q_\nu, P_1, \ldots, P_\nu, t) = H(q_1, \ldots, q_\nu, p_1, \ldots, p_\nu, t) + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

A fentiek szerint K-tól azt kívánjuk, hogy benne egy Q_i koordináta se forduljon elő; ekkor ugyanis a megoldás rögtön felírható. Még egyszerűbb lenne ez a megoldás, ha K azonosan 0 volna, mert ekkor:

$$Q_i = \text{állandó}, \; P_i = \text{állandó}. \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Az ezt a végeredményt származtató S alkotófüggvényre fennáll:

$$\frac{\partial S(q_1, \ldots, q_\nu, Q_1, \ldots, Q_\nu, t)}{\partial t} + H(q_1, \ldots, q_\nu, p_1, \ldots, p_\nu, t) = 0.$$

Itt most $p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$, a Q_i-k pedig állandók. Ezért S-nek mint a $q_1, q_2, \ldots, q_\nu, t$ változók függvényének a

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_\nu, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_\nu}, t\right) = 0}$$

*Hamilton—Jacobi-féle parciális differenciálegyenlet*et kell kielégítenie. Ha $S(q_1, \ldots, q_\nu, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, t)$ ennek a parciális differenciálegyenletnek egy ν számú tetszőleges állandót tartalmazó teljes megoldása, akkor a

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = -\beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

egyenletek (ahol a β_i-k tetszőleges állandók) a mechanikai probléma megoldását adják. A második egyenletcsoport határozza meg a koordinátákat mint az idő függvényeit, az első egyenletcsoport pedig az impulzusokat.

Ha a Hamilton-függvény az időtől explicite nem függ (konzervatív szkleronom rendszernél), akkor

$$S = S^* - E\,t,$$

ahol E egy állandó és S^* pedig csak a q_i-k függvénye. Ez esetben az ún. *rövidített Hamilton—Jacobi-féle differenciálegyenlet:*

$$H\left(q_1, \ldots, q_\nu, \frac{\partial S^*}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S^*}{\partial q_\nu}\right) = E.$$

(Ebből látszik, hogy E a rendszer teljes energiája.)

Ennek egy teljes megoldása pl. ilyen alakú:

$$S^* = S^*(q_1, \ldots, q_\nu, E, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu).$$

Ha találtunk ilyen S^*-t, a probléma megoldását a következő egyenletek adják:

$$\frac{\partial S^*}{\partial q_i} = p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial E} = t - \beta_1, \qquad \frac{\partial S^*}{\partial \alpha_i} = -\beta_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, \nu).$$

Itt $E, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \beta_1, \ldots, \beta_\nu$ a 2ν számú tetszőleges állandó.

5. §. KÉT FÜGGETLEN VÁLTOZÓ : A REZGŐ HÚR PROBLÉMÁJA

a) Kettős integrálok extrémuma

1. Vizsgáljuk az (x, y) sík T tartományára kiterjesztett

$$I\langle u\rangle = \iint_T f(x, y, u, u'_x, u'_y)\, dx\, dy$$

kettős integrált. Az adott f függvény legyen kétszer differenciálható az argumentumai szerint. Keressük azt a parciális differenciálegyenletet, melyet annak a folytonosan differenciálható $u(x, y)$ függvénynek kell kielégítenie, amelyikkel az $I\langle u\rangle$ integrál extrémum lesz, és amelyik a T tartományt határoló L zárt görbe egyes pontjaiban előírt kerületi értékeket vesz fel.

Konkurrenciába bocsátjuk az

$$U(x, y) = u(x, y) + \varepsilon\, \eta(x, y)$$

függvényeket, ahol $u(x, y)$ a meghatározandó extrémális, ε a paraméter és $\eta(x, y)$ egy olyan tetszőleges, folytonosan differenciálható függvény, mely eleget tesz az

$$\eta(x, y) = 0$$

az L görbén kerületi feltételnek.

Az

$$I(\varepsilon) = \iint_T f(x, y, U, U'_x, U'_y)\, dx\, dy$$

integrál extrémum, ha $\varepsilon = 0$. Ennek szükséges feltétele, hogy

$$I'(0) = 0$$

legyen. Alkalmazzuk a paraméteres integrál paraméter szerinti deriválására vonatkozó szabályt:

$$I'(\varepsilon) = \iint_T \left(\frac{\partial f}{\partial U}\eta + \frac{\partial f}{\partial U'_x}\eta'_x + \frac{\partial f}{\partial U'_y}\eta'_y\right) dx\, dy.$$

Ebből

$$I'(0) = \iint_T \left(\frac{\partial f}{\partial u}\eta + \frac{\partial f}{\partial u'_x}\eta'_x + \frac{\partial f}{\partial u'_y}\eta'_y\right) dx\, dy = 0.$$

Alkalmazzuk most Green tételét, hogy az integrál utolsó két tagját átalakítsuk. Azt kapjuk, hogy

$$\iint_T \left\{ \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_y}\right) \right\} \eta \, dx \, dy + \int_l \left(\frac{\partial f}{\partial u'_x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial f}{\partial u'_y} \frac{dx}{ds} \right) \eta \, ds = 0,$$

vagy az $\eta(x, y)$-ra kirótt kerületi feltétel figyelembevételével:

$$\iint_T \left\{ \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_y}\right) \right\} \eta \, dx \, dy = 0.$$

Ebből pedig — a variációszámítás alaplemmája szerint — az adódik, hogy az $I\langle u\rangle$ integrál extrémumát adó $u = u(x, y)$ függvénynek a

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_y}\right) = 0}$$

Euler—Lagrange-féle differenciálegyenletet kell kielégítenie a T tartomány belsejében.

2. Ha speciálisan az $u(x, y)$-ra nem írunk elő kerületi értékeket az L görbe mentén (vagy annak egy része mentén), akkor ott $u(x, y)$-nak ki kell elégítenie még a

$$\frac{\partial f}{\partial u'_x} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial f}{\partial u'_y} \cdot \frac{dx}{ds} = 0$$

egyenletet is.

3. A kettős integrálokkal kapcsolatos izoperimetrikus probléma megoldása teljesen hasonlóan történik, mint azt az egyszeres integráloknál láttuk. Ha tehát az

$$I\langle u\rangle = \iint_T f(x, y, u, u'_x, u'_y) \, dx \, dy$$

integrál extrémumát adó $u = u(x, y)$ függvényt keressük, az előírt

$$\iint_T g(x, y, u, u', u') \, dx \, dy = A \qquad (A \text{ megadott állandó})$$

mellékfeltétel esetén, akkor a megoldandó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet:

$$\frac{\partial f^*}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f^*}{\partial u'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f^*}{\partial u'_y}\right) = 0,$$

ahol $f^* = f + \lambda g$. (Itt λ a Lagrange-féle multiplikátor).

b) A rezgő húr problémája

Vizsgáljunk egy tökéletesen hajlékony, rugalmas húrt, melyet egyensúlyi helyzetében az x tengely mentén az $x = 0$ és $x = l$ helyeken rögzített végpontjai között, az állandó σ húzófeszültséget ébresztő húzóerők tartanak kifeszítve. Valamilyen külső hatás folytán a húr egy, az x tengelyt tartalmazó (pl. u, x) síkban transzverzális rezgéseket tud végezni, miközben a húr egyes részei (a rögzített két végpont kivételével) az x tengelyre merőleges irányban mozdulnak el. Feltesszük azt, hogy az egyes részecskék rezgéseinek amplitudói elég kicsinyek, és így a húrnak bármely pontjában és bármely t időpillanatban az érintője az x tengellyel olyan kis szöget zár be, hogy ennek a tangense az egységhez képest elenyésző. Feltesszük továbbá azt, hogy semmiféle csillapítás nincsen, vagyis a rezgő húr mint mechanikai rendszer konzervatív.

Az egyensúlyi helyzetben az x koordinátával jellemzett részecske transzverzális irányú elmozdulását az $u = u(x, t)$ függvény határozza meg; az $u(x, t)$ függvény $(0 \leqq x \leqq l)$ határozza meg bármely t időpillanatban az egész húr alakját a rezgés folyamán. A húr érintőjének a meredekségét az x helyen és a t időpontban a $\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x(x, t)$ parciális derivált határozza meg. A húr bármelyik pontjának a pillanatnyi sebességét pedig a $\frac{\partial u}{\partial t} = u'_t(x, t)$ parciális derivált határozza meg. Azt a tényt, hogy a húr két végpontja $(x = 0, x = l)$ rögzített, fejezik ki az

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \qquad \text{(bármely } t \text{ mellett)}$$

kerületi feltételek.

Az $u(x, t)$ ismeretlen függvényt meghatározó differenciálegyenlet felállításához a Hamilton-féle elvet alkalmazzuk. Ehhez ismernünk kell a kinetikus és a potenciális energia kifejezéseit.

Jelölje $\mu = \mu(x)$ a húr hosszegységére vonatkozó tömeget, akkor a kinetikus energia:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \mu \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx.$$

A potenciális energia egyenlő a σ feszültségnek és a húr hosszváltozásának a szorzatával. Ha a $t = 0$ időpillanatban a húr az x tengellyel esik egybe, akkor az eredeti hossz l. Egy későbbi, $t > 0$ időpillanatban a húr megváltozott hossza:

$$\int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx,$$

tehát a hosszváltozás:

$$\int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx - l.$$

Figyelembe véve azt a feltevésünket, hogy $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$ az egységhez képest kicsiny, megengedett a következő közelítés:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

Ezzel a hosszváltozás:

$$\int_0^l \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx - l \approx \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx,$$

és a potenciális energia:

$$V = \frac{\sigma}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Alkalmazzuk most a Hamilton-féle elvet: A rezgő húr mozgását az az $u = u(x, t)$ függvény határozza meg, a $t_1 \leqq t \leqq t_2$ időintervallumban, amelyik az

$$I\langle u\rangle = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \left\{\mu\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\} dx\,dt$$

integrál extrémumát adja, és amelyik az előírt

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

kerületi feltételeknek eleget tesz. Alkalmazva az 5. § *a)* 1. végeredményét, nyerjük a

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\sigma}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

differenciálegyenletet, a *rezgő húr differenciálegyenletét.*

Most még megállapítjuk azt, hogy milyen feltételnek kell teljesülnie akkor, ha elhagyjuk az

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

kerületi feltételeket, és csak azt kötjük ki, hogy a húr két végpontja az (u, x) síkban az x tengelyre merőleges irányban, az $x = 0$, illetve $x = l$ egyenesek mentén mozoghasson. Alkalmazzuk az 5. § *a)* 2.-ben közölt eredményt az

$$f = \frac{1}{2}\left\{\mu\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}$$

függvényre, figyelembe véve azt, hogy a mi problémánknál a T integrálási tartomány az (x, t) sík $0 \leqq x \leqq l$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$ derékszögű négyszöge, és az u értéke csak az $x = 0$, $x = l$ egyenesek mentén nincs előírva.

Így ezeknek az „egyenesszakaszoknak" a mentén $\frac{dt}{ds} = \pm 1$ és $\frac{dx}{ds} = 0$. Így az idézett eredmény szerint a következő egyenletet nyerjük:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

az $x = 0$ és $x = l$ helyeken.

c) A rezgő húrral kapcsolatos sajátérték-sajátfüggvény probléma

Kíséreljük meg a rezgő húr differenciálegyenletének a megoldását

$$u(x, t) = \varphi(x)\,\psi(t)$$

alakban előállítani, ahol φ csak x-től és ψ csak t-től függ. Ha ezt a feltételezett megoldást behelyettesítjük a differenciálegyenletbe, nyerjük a következőt:

$$\frac{\sigma\,\varphi''}{\mu\,\varphi} = \frac{\ddot{\psi}}{\psi},$$

ahol $\varphi'' = \frac{d^2\varphi}{dx^2}$ és $\ddot{\psi} = \frac{d^2\psi}{dt^2}$. Mivel ebben az egyenletben a bal oldal csak x-től, a jobb oldal pedig csak t-től függ, ez az egyenlet csak úgy állhat fenn az x és t független változók minden értékénél, ha a bal oldal és a jobb oldal állandó. Jelöljük ezt az egyelőre határozatlan állandót $(-\lambda)$-val. Akkor nyerjük a következő két közönséges differenciálegyenletet:

$$\text{(I.)}\quad \sigma\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\,\mu(x)\,\varphi = 0; \quad \text{és} \quad \text{(II.)}\quad \frac{d^2\psi}{dt^2} + \lambda\,\psi = 0.$$

Hogy az egyelőre határozatlan λ állandónak milyen értéket kell tulajdonítanunk, az a kerületi feltételektől függ. Ha a húr mindkét végpontja rögzített, akkor teljesülniök kell a

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0$$

kerületi feltételeknek. Ha viszont valamelyik végpont vagy esetleg mindkettő szabad, olyan értelemben, ahogyan ezt a *b)* pont végén megfogalmaztuk, akkor teljesülnie kell a

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \text{ha } x = 0, \quad \text{vagy} \quad x = l$$

(vagy esetleg mindkét helyen) feltételnek.

Ezek szerint a feladat megoldásához szükségünk van az (I.) differenciálegyenlet $\varphi = \varphi(x, \lambda)$ általános megoldására, összhangban a kirótt kerületi feltételekkel. Ki lehet mutatni azt, hogy csak egy olyan meghatározott λ értéksorozat található, melyre a $\varphi(x, \lambda)$ megoldás eleget tesz a kerületi feltételeknek. (A $\varphi \equiv 0$, ha $0 \leqq x \leqq l$ esetet természetesen — mint érdektelent — kirekesztjük.) Ezeket a λ értékeket növekvő sorrendben lehet elrendezni: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ Ez a számsorozat végtelen elemszámú

és felülről nem korlátos, de minden esetben van egy legkisebb eleme: λ_1. Ezeket a λ értékeket, amelyek mellett az (I.) differenciálegyenletnek van olyan megoldása, mely a kerületi feltételeket is kielégíti, nevezzük *sajátértékek*nek; a nekik megfelelő φ megoldásokat pedig *sajátfüggvények*nek. Mindegyik sajátértékhez csakis egy, a többitől lineárisan független sajátfüggvény tartozik. Világos az, hogy a sajátértékek a feladatban szereplő l és σ állandóktól, a $\mu(x)$ függvénytől és az előírt kerületi feltételektől függnek.

Mivel a sajátfüggvények által kielégítendő differenciálegyenlet és az előírt kerületi feltételek is homogén lineárisak, világos, hogy bármelyik sajátfüggvénynek egy zérustól különböző állandóval képezett szorzata ugyanazon sajátértéknek megfelelő sajátfüggvény lesz. Éppen ezért megengedett, hogy a sajátfüggvényekre a következő megszorítást kössük ki:

$$\int_0^l \mu \varphi^2 \, dx = 1.$$

(Megjegyezzük, hogy fizikai jelentésénél fogva $\mu > 0$, tehát ez a megszorítás minden esetben teljesíthető!) Ennek a megszorításnak eleget tevő sajátfüggvényekről azt mondjuk, hogy a $0 \leqq x \leqq l$ intervallumban a $\mu(x)$ súlyfüggvény mellett *normál*tak.

Ha az (I.) differenciálegyenletet φ-vel szorozzuk, és az így nyert egyenletet a $0 \leqq x \leqq l$ intervallumban integráljuk, akkor a normálásra vonatkozó fenti megszorítás figyelembevételével nyerjük, hogy:

$$\lambda = -\sigma \int_0^l \varphi \frac{d^2\varphi}{dx^2} dx = -\sigma \left[\varphi \frac{d\varphi}{dx} \right]_0^l + \sigma \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx.$$

Mivel φ sajátfüggvény és az $x = 0$, $x = l$ helyeken vagy $\varphi = 0$, vagy $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, ezért

$$\lambda = \sigma \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx,$$

s ez nem lehet negatív, mivel $\sigma > 0$. Ebből pedig az következik, hogy egy sajátérték sem lehet negatív.

Kizárva a $\lambda = 0$ kivételes esetet és figyelembe véve azt, hogy λ nem lehet negatív, a (II.) differenciálegyenlet általános megoldására nyerjük:

$$\psi = \psi_n = A_n \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n}\, t; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

ahol A_n, B_n tetszőleges állandók. Ha a λ_n sajátértéknek megfelelő sajátfüggvényt így jelöljük: $\varphi_n = \varphi_n(x)$, akkor

$$u = u_n(x, t) = \varphi_n(x) \, (A_n \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n}\, t); \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

minden n-re a rezgő húr differenciálegyenletének egy olyan megoldása, mely eleget tesz a kerületi feltételeknek.

Láthatóan ezek a megoldások a t időnek periodikus függvényei. A periódus: $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_n}}$, a frekvencia: $\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi}$. Így a rugalmas húr csak a sajátértékeknek megfelelő frekvenciákkal képes rezegni. Ha a sajátértékek sorozatát meghatározzuk, ezzel már meg van határozva a húr rezgése természetes frekvenciáinak (önfrekvenciáinak) a sorozata (a rezgési frekvenciák spektruma) is. A legkisebb λ_1 sajátértékhez tartozik a rezgés ún. alapfrekvenciája: $\frac{\sqrt{\lambda_1}}{2\pi}$.

d) Tetszőleges függvénynek a sajátfüggvények szerinti sorbafejtése

Mindenekelőtt tekintsük a rezgő húrhoz tartozó sajátértékek növekvő sorozatát:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

és az ezekhez tartozó sajátfüggvényeket: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$

Bármely $n = 1, 2, 3, \ldots$ esetén a φ_n sajátfüggvény kielégíti a

$$\sigma \varphi_n'' + \lambda_n \mu \varphi_n = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq l)$$

differenciálegyenletet, és a

$$\varphi_n = 0 \text{ vagy } \varphi_n' = 0, \text{ ha } x = 0 \text{ és } x = l$$

kerületi feltételeket.

Ha most kiválasztjuk a sajátfüggvények sorozatának két tetszőleges, különböző φ_j és φ_k $(j \neq k)$ elemét, ezek mindketten kielégítik az előbbi differenciálegyenletet és ugyanazokat a kerületi feltételeket. Így

$$(\lambda_k - \lambda_j) \int_0^l \mu \varphi_j \varphi_k \, dx = \sigma \int_0^l (\varphi_k \varphi_j'' - \varphi_j \varphi_k'') \, dx = \sigma \left[\varphi_k \varphi_j' - \varphi_j \varphi_k'\right]_0^l = 0.$$

És mivel $\lambda_k \neq \lambda_j$, ha $j \neq k$, így

$$\int_0^l \mu \varphi_j \varphi_k \, dx = 0 \qquad (j \neq k).$$

A sajátfüggvények tehát a $0 \leqq x \leqq l$ intervallumban *ortogonális*ak a $\mu(x)$ súlyfüggvény mellett. Figyelembe véve azt, hogy a sajátfüggvények normáltak is, írhatjuk:

$$\int_0^l \mu \varphi_j \varphi_k \, dx = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq k, \\ 1, & \text{ha } j = k. \end{cases}$$

A sajátfüggvények a $0 \leqq x \leqq l$ intervallumban a $\mu = \mu(x)$ súlyfüggvény mellett *ortonormált* rendszert alkotnak.

Mindezek figyelembevételével, ha $g(x)$ egy tetszőleges, a $0 \leqq x \leqq l$ intervallumban szakaszonként folytonos és szakaszonként differenciálható, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad \text{ahol} \quad c_n = \int_0^l \mu \varphi_n g \, dx$$

sor egyenletesen konvergál $g(x)$-hez minden olyan részintervallumában a $0 \leqq x \leqq l$ intervallumnak, ahol $g(x)$ folytonos. Így írhatjuk, hogy

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad \text{ahol} \quad c_n = \int_0^l \mu \varphi_n g \, dx.$$

Ezenkívül, minden olyan részintervallumban, ahol $g'(x)$ folytonos, fennáll:

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n'(x),$$

s ez a sor is egyenletesen konvergens.

(Ezeknek a soroknak az $x = 0$, $x = l$ kerületi pontokban való viselkedésével itt nem foglalkozunk. Ez még további részletezést igényelne !)

e) A sajátérték-sajátfüggvény probléma egy minimum-tulajdonsága

A nagyság szerint növekvő sorozatba rendezett sajátértékek közül a k-adik sajátérték: λ_k az

$$I\langle\varphi\rangle = \sigma \int_0^l \varphi'^2 \, dx$$

integrál minimuma, ahol a konkurrenciába bocsátott φ függvények eleget tesznek az

$$\int_0^l \mu \varphi^2 \, dx = 1$$

normálási feltételnek és a $(k-1)$ számú

$$\int_0^l \mu \varphi_j \varphi \, dx = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k-1)$$

ortogonalitási feltételnek, ahol pedig φ_j a szóban forgó problémával kapcsolatos

$$\sigma \varphi_j'' + \lambda_j \mu \varphi_j = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

differenciálegyenletet és az előírt kerületi feltételeket ($\varphi_j = 0$ vagy $\varphi_j' = 0$, ha $x = 0$, $x = l$) kielégítő sajátfüggvény. Ezenkívül feltesszük azt, hogy valamennyi konkurrenciába bocsátott φ függvény a $0 \leqq x \leqq l$ intervallumban mindenütt folytonos, és létezik a legalább szakaszonként folytonos első deriváltja: φ'.

Ha a húr, melyre a szóban forgó probléma vonatkozik, az $x = 0$ (vagy $x = l$ vagy esetleg mindkét) helyen rögzített, akkor még φ-re ki kell kötnünk azt is, hogy

$\varphi = 0$ az $x = 0$ (vagy $x = l$ vagy esetleg mindkét) helyen. (Nem szükséges ez a megszorítás akkor, ha a húr egyik — vagy mindkét — vége szabad).

A mondott megszorítások mellett

$$\lambda_k = I\langle\varphi_k\rangle.$$

Tegyük fel ugyanis azt, hogy a konkurrenciába bocsátott függvénynek és deriváltjának az *e)* pont szerinti sorbafejtett alakja:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad \varphi' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n' \qquad \left(c_n = \int_0^l \mu \varphi_n \varphi \, dx\right).$$

A mondott ortogonalitási feltétel következménye az, hogy

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{k-1} = 0.$$

Ha φ^2-ben az egyik tényezőt φ sorával helyettesítjük, a normálási feltételből kapjuk a következőt:

$$\int_0^l \mu \varphi^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^l \mu \varphi_n \varphi \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = 1.$$

Ha pedig az $I\langle\varphi\rangle$ integrálban szereplő φ'^2-ben az egyik tényezőt φ' sorával helyettesítjük, írhatjuk:

$$I = \sigma \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^l \varphi_n' \varphi' \, dx = \sigma \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left\{ [\varphi_n' \varphi]_0^l - \int_0^l \varphi_n'' \varphi \, dx \right\}.$$

Ez pedig a kerületi feltételek miatt így egyszerűsödik:

$$I = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^l (\sigma \varphi'') \varphi \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \int_0^l \mu \varphi_n \varphi \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2.$$

Ha most még figyelembe vesszük azt, hogy $c_1 = c_2 = \ldots = c_{k-1} = 0$, akkor

$$I = \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n c_n^2 = \lambda_k \sum_{n=k}^{\infty} c_n^2 + \sum_{n=k}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_k) c_n^2 = \lambda_k + \sum_{n=k}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_k) c_n^2.$$

Mivel $\lambda_n > \lambda_k$, ha $n > k$, ezért ebből következik, hogy $I \geqq \lambda_k$.

Az egyenlőség akkor áll fenn, ha $c_k = 1$ és $c_{k+1} = c_{k+2} = c_{k+3} = \ldots = 0$, vagyis amikor $\varphi = \varphi_k$. Ezzel az állításunkat minden részletében igazoltuk.

Még megjegyezzük, hogy a sajátértékekre vonatkozó fenti minimumtulajdonságot a sajátérték-sajátfüggvény probléma közelítő megoldására vonatkozó különböző eljárások alkalmával szokás kihasználni (Ritz-féle eljárás).

f) A rezgő húr differenciálegyenletének általános megoldása

Tegyük fel, hogy ismerjük a

$$\sigma \varphi_m'' + \lambda_m \mu \varphi_m = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq l)$$

$\varphi_m = 0$, vagy $\varphi_m' = 0$, ha $x = 0$ és $x = l$ minden m-re, sajátérték-sajátfüggvény feladat megoldásait: a

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ldots$$

ortonormált sajátfüggvényeket és az ezeknek megfelelő

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \ldots$$

sajátértékeket.

Keressük az

$$I\langle u\rangle = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right\} dx\, dt$$

integrál extrémumát adó $u = u(x, t)$ függvényt.

Feltesszük, hogy $u = u(x, t)$ eleget tesz a következő kikötéseknek:

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ deriváltjával együtt az x és t folytonos függvénye;

2. $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ és $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t}$ az x-nek szakaszonként folytonos függvénye;

3. $u(x, t)$ meghatározza a húr tényleges alakját a $t = t_1$ és $t = t_2$ időpontokban;

4. ha a húr egyik (vagy mindkét) végpontja rögzített, akkor bármely t időpontban $u(x, t)$ zérussal egyenlő abban a (vagy mindkét) végpontban.

Ezeknek a feltételeknek az alapján, a *d)* pontban mondottak szerint írhatjuk:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(t)\, \varphi_m(x), \qquad \text{ahol} \qquad c_m = \int_0^l \mu\, \varphi_m\, u\, dx,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} d_m(t)\, \varphi_m(x), \qquad \text{ahol} \qquad d_m = \int_0^l \mu\, \varphi_m \frac{\partial u}{\partial t}\, dx.$$

Mivel $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ a feltevésünk szerint x-nek folytonos függvénye, ezért

$$d_m = \frac{dc_m}{dt} = \dot{c}_m.$$

Írhatjuk:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} \dot{c}_m(t)\, \varphi_m(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(t)\, \varphi_m'(x).$$

Ezekkel pedig

$$I = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \dot{c}_m \int_0^l \mu\, \varphi_m \frac{\partial u}{\partial t}\, dx - \sigma\, c_m \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \varphi_m'\, dx \right\} dt.$$

Parciális integrálással és a kerületi feltételek figyelembevételével ezt így alakíthatjuk át:

$$I = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \dot{c}_m \int_0^l \mu \varphi_m \frac{\partial u}{\partial t} dx + c_m \int_0^l u(\sigma \varphi_m'') \, dx \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \dot{c}_m \int_0^l \mu \varphi_m \frac{\partial u}{\partial t} dx - \lambda_m c_m \int_0^l \mu \varphi_m u \, dx \right\} dt = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{c}_m^2 - \lambda_m c_m^2) \, dt.$$

Ezzel a megoldandó variációs feladatot, egy kettős integrál extrémumát adó $u(x, t)$ függvény meghatározásának a feladatát visszavezettük egyszeres integrálok extrémumát adó $c_m(t)$ függvények meghatározásának a feladatára. Az ehhez a feladathoz tartozó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet:

$$\ddot{c}_m + \lambda_m c_m = 0, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

A $\lambda_m = 0$ esetet ismét kirekesztve, ennek az általános megoldása:

$$c_m(t) = A_m \cos \sqrt{\lambda_m}\, t + B_m \sin \sqrt{\lambda_m}\, t; \qquad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

ahol A_m és B_m tetszőleges állandók.

Így végeredményben a rezgő húr problémájának az általános megoldása:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(x) \, (A_m \cos \sqrt{\lambda_m}\, t + B_m \sin \sqrt{\lambda_m}\, t).$$

Az A_m és B_m állandókat meghatározhatjuk adott kezdeti feltételek alapján.

6. §. TÖBB FÜGGETLEN VÁLTOZÓ: A REZGŐ MEMBRÁN

a) **Többes integrálok extremizálása**

1. Vizsgáljuk először a háromdimenziós tér mérhető, zárt V tartományára kiterjesztett

$$I\langle u\rangle = \iiint_V f(x, y, z, u, u'_x, u'_y, u'_z)\, dx\, dy\, dz$$

hármas integrált. Feltesszük azt, hogy f az argumentumainak kétszer folytonosan differenciálható függvénye. Feladatunk meghatározni azt a kétszer differenciálható $u = u(x, y, z)$ függvényt, mely az $I\langle u\rangle$ integrál extrémumát adja és a V tartományt határoló zárt F kerületen előírt értékeket vesz fel.

Konkurrenciába bocsátjuk az

$$U(x, y, z) = u(x, y, z) + \varepsilon\eta\,(x, y, z)$$

függvényeket, ahol $u(x, y, z)$ az extremális, ε a paraméter és $\eta(x, y, z)$ egy olyan tetszőleges, folytonosan differenciálható függvény, mely az

$$\eta(x, y, z) = 0 \qquad \text{(az } F \text{ kerület pontjaiban)}$$

feltételt kielégíti.

Ha u helyébe U-t helyettesítünk, I az ε paraméter függvénye lesz:

$$I(\varepsilon) = \iiint_V f(x, y, z, U, U'_x, U'_y, U'_z)\, dx\, dy\, dz,$$

és

$$I(0) = \textit{extrémum},$$

tehát

$$I'(0) = 0$$

kell, hogy legyen, azaz

$$I'(0) = \iiint_V \left(\frac{\partial f}{\partial u}\eta + \frac{\partial f}{\partial u'_x}\eta'_x + \frac{\partial f}{\partial u'_y}\eta'_y + \frac{\partial f}{\partial u'_z}\eta'_z\right) dx\, dy\, dz = 0.$$

Alkalmazzuk a Green-féle tételt:

$$I'(0) = \iiint_V \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_z}\right)\right]\eta\, dx\, dy\, dz +$$

$$+ \iint_F \left[\frac{\partial f}{\partial u'_x}\cos(n, x) + \frac{\partial f}{\partial u'_y}\cos(n, y) + \frac{\partial f}{\partial u'_z}\cos(n, z)\right]\eta\, dF = 0.$$

Az η-ra kirótt kerületi feltétel miatt azonban az itt szereplő második integrál zérus, így marad:

$$I'(0) = \iiint_V \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_z}\right)\right]\eta \, dx\, dy\, dz = 0.$$

Ebből pedig — a variációszámítás alaplemmájának hármas integrálokra vonatkozó általánosítása alapján — következik a

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_z}\right) = 0}$$

Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet.

2. Ennek a problémának általánosítása az, hogy feltesszük azt, hogy $u = u(x, y, \ldots, z)$ n változós és $I\langle u\rangle$ az n méretű tér V zárt tartományára kiterjesztett n-szeres integrál. Ha most

$$f = f(x, y, \ldots, z, u, u'_x, u'_y, \ldots, u'_z),$$

akkor az u extrémális függvény számára — a fentihez hasonló okoskodással — nyerjük a

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_y}\right) - \ldots - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_z}\right) = 0$$

Euler—Lagrange-féle differenciálegyenletet.

3. Ha — az általánosított izoperimetrikus problémában — az $u = u(x, y, z)$ extrémális számára az

$$\iiint_V g_k(x, y, z, u, u'_x, u'_y, u'_z)\, dx\, dy\, dz = A_k,\ k = 1, 2, \ldots, s \quad (A_k \text{ megadott állandó});$$

mellékfeltételeket rójuk ki, akkor az u extrémális függvény számára a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ Lagrange-féle multiplikátorokkal képezett

$$f^* = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_s g_s$$

alkotófüggvénnyel felírt

$$\frac{\partial f^*}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f^*}{\partial u'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f^*}{\partial u'_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f^*}{\partial u'_z}\right) = 0$$

Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet adódik.

4. Tegyük fel azt a speciális esetet, hogy az $I\langle u\rangle$ hármas integrálban szereplő f alkotó függvény a következő:

$$f = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

ahol P, Q és R az x, y, z, u változók tetszőleges folytonosan differenciálható függvényei.

Ekkor a térbeli Gauss—Osztrogradszkij-tétel alapján:

$$I\langle u\rangle = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint\limits_F [P\cos(n, x) + Q\cos(n, y) + R\cos(n, z)]\, dF,$$

ahol F a zárt V térrészt határoló felületet jelenti. Vagyis esetünkben az $I\langle u\rangle$ funkcionál egyedül a P, Q, R függvényeknek az F felületen felvett értékeitől fog függeni. Ha tehát kerületi feltételként előírjuk az $u = u(x, y, z)$ extremális függvény értékét az F felületen, akkor ezzel a P, Q, R függvényeknek F-en felvett értékei is elő vannak írva, tehát az $I\langle u\rangle$ integrál értéke is meghatározott. Így az $I\langle u\rangle$ integrál extremizálására vonatkozó variációs feladat értelmetlen: az ehhez a problémához tartozó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet egy azonosság.

Ha most még figyelembe vesszük azt, hogy az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet az f függvényre nézve lineáris, akkor az előzőkből az következik, hogy a bármely f alkotófüggvényre felírt Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet nem változik meg akkor, ha f-hez egy tetszőleges

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

divergencia jellegű kifejezést adunk hozzá. (Ha $v(r) = Pi + Qj + Rk$, akkor

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} v.)$$

b) A rezgő membrán problémája

Legyen egy vékony, rugalmas membrán az (x, y) sík egy önmagát nem metsző, zárt L görbéje mint kerület között kifeszítve. A kerületet képező L görbéről feltesszük azt, hogy véges számú rektifikálható ívdarabból áll. Az L görbe által bezárt D tartomány egybeesik a membrán egyensúlyi helyzetével.

Tegyük fel, hogy valamilyen külső hatás folytán a membrán olyan rezgéseket végez, hogy pontjai az (x, y) síkra merőleges irányban mozognak. Képzeljük el azt, hogy a membrán az L kerület mentén be van fogva. A membrán egyes pontjainak helyzetét bármely t időpontban az $u = u(x, y, t)$ háromváltozós függvény határozza meg, amelyre fennáll az

$$u(x, y, t) = 0,$$

az L görbe pontjaiban minden t-re érvényes kerületi feltétel. Az $u(x, y, t)$ függvényről feltesszük azt, hogy a D tartományban folytonosak az idő szerinti első és a helykoordináták szerinti második parciális deriváltjai.

A membrán rezgőmozgását leíró $u(x, y, t)$ függvény meghatározására alkalmazni fogjuk a Hamilton-féle elvet. Ehhez azonban ismernünk kell a kinetikus és a potenciális energiát.

Tegyük fel, hogy a membrán területegységre eső tömege: $\mu = \mu(x, y)$. Feltesszük azt, hogy a rezgés amplitudói kicsinyek, és így μ független az u-tól. Mivel az (x, y)

helyen a t időpontban a sebesség: $\frac{\partial u}{\partial t}$, ezért a területegység kinetikus energiája: $\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$ és az egész kinetikus energia:

$$T = \frac{1}{2}\iint_D \mu\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\,dy.$$

A potenciális energiát azzal a feltevéssel határozzuk meg, hogy a membrán tökéletesen hajlékony, és a potenciális energia egyenlő azzal a munkával, amely a deformáció következtében beálló felszínmegváltozáshoz szükséges. S ha még a σ területegységre vonatkozó feszültséget is állandónak tételezzük fel, akkor mondhatjuk, hogy a potenciális energia egyenlő a felszín megváltozása szorozva σ-val.

A membrán eredeti felszíne:

$$\iint_D dx\,dy;$$

a megváltozott felszín:

$$\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Így a potenciális energia:

$$V = \sigma\left\{\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy - \iint_D dx\,dy\right\}.$$

Feltesszük azt, hogy a membrán deformációja olyan kicsiny, hogy megengedett a következő közelítés:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \approx 1+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right).$$

Így azt nyerjük, hogy

$$V = \frac{1}{2}\sigma\iint_D\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy.$$

Alkalmazva a Hamilton-féle elvet, a feladatunkat így fogalmazhatjuk:

Meghatározandó az az $u = u(x, y, t)$ függvény, mely az

$$I\langle u\rangle = \int_{t_1}^{t_2}(T-V)\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\iint_D\left\{\mu\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-\sigma\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\right\}dx\,dy\,dt$$

integrál extrémumát adja, az előírt kerületi feltételek mellett.

Az így megfogalmazott variációs feladathoz tartozó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet *a rezgő membrán differenciál*egyenlete:

$$\sigma \Delta u = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ahol $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, az ún. *Laplace-féle operátor*, tehát

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

c) A rezgő membránhoz tartozó sajátérték-sajátfüggvény probléma

A rezgő membrán differenciálegyenletének megoldását az

$$u = \varphi(x, y)\, \psi(t)$$

alakban kíséreljük meg megkeresni, ahol $\varphi(x, y)$ eleget tesz a

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad \text{(az } L \text{ görbe pontjaiban)}$$

kerületi feltételnek és a

$$\iint_D \mu \varphi^2 \, dx \, dy = 1$$

normálási feltételnek.

Mivel

$$\Delta u = \psi \Delta \varphi \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi \frac{d^2 \psi}{dt^2} = \varphi \ddot{\psi},$$

ezért a rezgő membrán differenciálegyenletét így írhatjuk:

$$\frac{\sigma \Delta \varphi}{\mu \varphi} = \frac{\ddot{\psi}}{\psi};$$

ahol a bal oldal csak x-től és y-tól, a jobb oldal pedig csak t-től függ, így az egyenlőség miatt mindkettőnek állandónak kell lennie. Legyen ez az egyelőre határozatlan állandó $-\lambda$, akkor nyerjük a következő két differenciálegyenletet:

$$\ddot{\psi} + \lambda \psi = 0$$

és

$$\sigma \Delta \varphi + \lambda \mu \varphi = 0.$$

Mivel $\lambda > 0$ (amint azt alább igazoljuk), ezért az első differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\psi(t) = A \cos \sqrt{\lambda}\, t + B \sin \sqrt{\lambda}\, t;$$

ahol A és B integrálási állandók. Láthatóan ψ az időnek periodikus függvénye, az $\omega = \sqrt{\lambda}$ körfrekvenciával.

A második differenciálegyenlet megoldása a D tartományban, a határoló L görbén előírt kerületi feltétellel, egy sajátérték-sajátfüggvény probléma. Minden olyan λ-t, melynél a

$$\sigma \Delta\varphi + \lambda \mu \varphi = 0 \qquad \text{(a } D \text{ tartományban)}$$

differenciálegyenletnek van olyan megoldása, mely eleget tesz a

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad \text{(az } L \text{ görbe pontjaiban)}$$

kerületi feltételnek, a feladat egy sajátértékének nevezzük. A hozzátartozó φ pedig egy sajátfüggvény.

Mindenekelőtt igazoljuk azt, hogy mindegyik sajátérték pozitív. Szorozzuk meg evégből a differenciálegyenletünk mindkét oldalát φ-vel és képezzük mindkét oldal D-re kiterjesztett kettős integrálját:

$$\lambda \iint_D \mu \varphi^2 \, dx \, dy = -\sigma \iint_D \varphi \Delta\varphi \, dx \, dy.$$

A bal oldal a φ-re vonatkozó normálási feltétel miatt λ-val egyenlő, a jobb oldalt pedig Green tétele alapján átalakítjuk és figyelembe vesszük a φ-re előírt kerületi feltételt. Így

$$\lambda = \sigma \iint_D \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \right\} dx \, dy - \sigma \int_L \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \, ds = \sigma \iint_D \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \right\} dx \, dy,$$

ahonnan következik, hogy

$$\lambda \geqq 0.$$

Az egyenlőség jel csak akkor következhet be, ha $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$, vagyis ha $\varphi =$ *állandó* a D tartományban. Mivel pedig $\varphi = 0$ az L görbe pontjaiban, ezért ez az állandó csak zérus lehet; ez pedig a mi feladatunk szempontjából érdektelen. Így csak

$$\lambda > 0$$

lehetséges.

Ugyanúgy, mint a rezgő húr problémájánál, a rezgő membránra vonatkozó sajátérték-sajátfüggvény problémát mint izoperimetrikus problémát lehet megfogalmazni: Keressük azt a kétszer differenciálható $\varphi = \varphi(x, y)$ függvényt, melynél az

$$I\langle\varphi\rangle = \sigma \iint_D \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \right\} dx \, dy$$

integrál extrémum, és amely kielégíti a

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad \text{(az } L \text{ görbe pontjaiban)}$$

kerületi feltételt és a

$$\iint_D \mu \varphi^2 \, dx \, dy = 1$$

normálási feltételt mint mellékfeltételt.

Az ehhez az izoperimetrikus problémához tartozó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet éppen a mi megoldandó

$$\sigma \Delta\varphi + \lambda \mu \varphi = 0$$

differenciálegyenletünk. Itt λ a Lagrange-féle multiplikátor szerepét játssza.

Az is közvetlenül látható, hogy $I\langle\varphi\rangle$ extremális értékei a λ sajátértékekkel egyenlők.

d) A kerületén rugalmasan megfogott membrán esete

Tegyük fel azt, hogy a membrán a kerületét jelentő L görbe mentén nincsen befogva (a befogási pontok rögzített pontokat jelentenek), hanem az L görbe mentén rugalmasan van megfogva, amin azt értjük, hogy a kerületi pontok az (x, y) síkra merőlegesen mozoghatnak úgy, hogy az egyes pontokra az (x, y) síktól mért kitéréssel arányos visszatérítő erők hatnak. A kerületi pontok nyugalmi, egyensúlyi helyzetben az L görbével egybeesnek.

Tegyük fel, hogy s jelenti az L görbe egy tetszőleges pontja és egy kiválasztott kezdőpontja közötti ívhosszat és ds az ívhossz differenciálja. (Egyensúlyi helyzetben !) A ds ívelemre ható visszatérítő erő:

$$-p(s)\, u\, ds,$$

ahol a $p(s) > 0$ függvény az ívhosszegységre eső és $u = 1$ kitéréshez tartozó erő nagyságát jelenti. A negatív előjel arra utal, hogy a visszatérítő erő mindig ellenkező irányú, mint a kitérés.

Az ívelemre ható visszatérítő erőhöz tartozó potenciális energia:

$$p(s)\, ds \int u\, du = \frac{1}{2} p(s)\, u^2\, ds,$$

ahol az integrálási állandót úgy választottuk meg, hogy zérus legyen az egyensúlyi helyzetben.

Az egész kerületre ható visszatérítő erőkhöz tartozó potenciális energia:

$$V_L = \frac{1}{2} \int_L p(s)\, u^2\, ds,$$

ahol természetesen u az s függvénye az L mentén.

A rugalmas megfogást olyannak tételezzük fel, hogy az nem befolyásolja a rezgő membrán kinetikus energiáját.

Ha most erre az esetre alkalmazni akarjuk a Hamilton-elvet, figyelembe kell vennünk a V_L előbb kiszámított potenciális energiát is. A feladatunk most tehát abban áll, hogy meghatározzuk az

$$I\langle u\rangle = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_D \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \sigma \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) \right] dx\, dy - \int_L p u^2\, ds \right\} dt$$

integrált extremizáló $u = u(x, y, t)$ függvényt.

Mindenekelőtt alakítsuk át az L görbe menti integrált Green tétele alapján, bevezetve a

$$P = \frac{1}{2} p u^2 \frac{ds}{dy}, \qquad Q = -\frac{1}{2} p u^2 \frac{ds}{dx} \qquad \text{(az } L \text{ görbén)}$$

összefüggésekkel a $P = P(x, y, t)$, $Q = Q(x, y, t)$ függvényeket, melyek egyébként a D tartományban tetszőleges, kétszer folytonosan differenciálható függvények. Azt írhatjuk, hogy

$$\int_L p u^2 \, ds = \frac{1}{2} \int_L \left(p u^2 \frac{ds}{dy} \, dy + p u^2 \frac{ds}{dx} \, dx \right) = \int_L (P \, dy - Q \, dx) =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

Így

$$I\langle u \rangle = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \iint_D \left\{ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \sigma \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right\} dx \, dy \, dt.$$

Ha most figyelembe vesszük a 6. §. *a)* 4. végeredményét, akkor azt látjuk, hogy az ehhez a problémához tartozó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet ugyanaz, mint amit a *b)* pontban is kaptunk:

$$\sigma \, \Delta u = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{(a } D \text{ tartományban),}$$

csakhogy most nyilván más lesz a kerületi feltétel.

Hogy ezt megállapítsuk, kövessük az *a)* pontban alkalmazott gondolatmenetet. Legyen

$$f = \frac{1}{2} \left\{ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \sigma \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] - \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right\};$$

és

$$I\langle u \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \iint_D f(x, y, t, u, u_x, u_y, u_t) \, dx \, dy \, dt.$$

Bocsássuk konkurrenciába az

$$U(x, y, t) = u(x, y, t) + \varepsilon \eta(x, y, t)$$

függvényeket, ahol

$$\eta(x, y, t_1) = \eta(x, y, t_2) = 0,$$

összhangban a Hamilton-elv azon követelményével, hogy u a $t = t_1$, és $t = t_2$ időpontokban elő van írva.

Ekkor az $I\langle u\rangle = extrémum$ szükséges feltételeként kapjuk az

$$I'(0) = \int_{t_1}^{t_2} \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial u}\eta + \frac{\partial f}{\partial u'_x}\eta'_x + \frac{\partial f}{\partial u'_y}\eta'_y + \frac{\partial f}{\partial u'_t}\eta'_t \right) dx\,dy\,dt = 0$$

egyenletet.

Alakítsuk át először az integrál utolsó tagját:

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_D \frac{\partial f}{\partial u'_t}\eta'_t\,dx\,dy\,dt = \iint_D \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial u'_t}\eta'_t\,dt\,dx\,dy = \iint_D \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial u'_t}\eta \right]_{t_1}^{t_2} - \right.$$

$$\left. - \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_t} \right) dt \right\} dx\,dy = - \int_{t_1}^{t_2} \iint_D \eta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_t} \right) dx\,dy\,dt,$$

figyelembe véve az η-ra kirótt feltételt.

Az integrál második és harmadik tagját pedig így alakítjuk át Green tétele alapján:

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial u'_x}\eta'_x + \frac{\partial f}{\partial u'_y}\eta'_y \right) dx\,dy\,dt = - \int_{t_1}^{t_2}\iint_D \eta \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_y} \right) \right] dx\,dy\,dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2}\int_L \eta \left[\frac{\partial f}{\partial u'_x}\cdot\frac{dy}{ds} - \frac{\partial f}{\partial u'_y}\cdot\frac{dx}{ds} \right] ds\,dt.$$

Ezekkel az átalakításokkal az $I'(0) = 0$ egyenletet így írhatjuk:

$$I'(0) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_D \eta \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_y} \right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_t} \right) \right] dx\,dy + \right.$$

$$\left. + \int_L \eta \left[\frac{\partial f}{\partial u'_x}\cdot\frac{dy}{ds} - \frac{\partial f}{\partial u'_y}\cdot\frac{dx}{ds} \right] ds \right\} dt = 0.$$

Ennek az egyenletnek fenn kell állnia minden olyan $\eta(x, y, t)$-re, mely kielégíti az

$$\eta(x, y, t_1) = \eta(x, y, t_2) = 0$$

feltételeket. Ha speciálisan η eltűnik az L görbe pontjaiban, akkor kapjuk a

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_y} \right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial u'_t} \right) = 0 \qquad \text{(a } D \text{ tartományban)}$$

Euler—Lagrange-féle egyenletet. Ennek a figyelembevételével nyerjük — más tetszőleges η-val — a

$$\frac{\partial f}{\partial u'_x}\cdot\frac{dy}{ds} - \frac{\partial f}{\partial u'_y}\cdot\frac{dx}{ds} = 0 \qquad \text{(az } L \text{ görbe pontjaiban)}$$

kerületi feltételt. (Transzverzalitás feltétele.)

Mármost alkalmazva ezt az eredményt a mi problémánkra, mivel

$$\frac{\partial f}{\partial u_x'} = -\sigma u_x' - \frac{1}{2} p u \frac{ds}{dy}; \quad \frac{\partial f}{\partial u_y'} = -\sigma u_y' + \frac{1}{2} p u \frac{ds}{dx} \qquad \text{(az } L \text{ görbe pontjaiban)},$$

azt kapjuk, hogy az u-nak ki kell elégítenie a

$$\sigma \left(u_x' \frac{dy}{ds} - u_y' \frac{dx}{ds} \right) + p u = 0 \qquad \text{(az } L \text{ görbe pontjaiban)},$$

illetve

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial n} + p u = 0 \qquad \text{(az } L \text{ görbe pontjaiban)}$$

kerületi feltételt. ($\frac{\partial u}{\partial n}$ jelenti az u-nak a D tartományt határoló L görbe külső normálisának irányában vett deriváltját).

Ha most az

$$u = \varphi(x, y)\, \psi(t)$$

alakban keressük a probléma megoldását, akkor egyrészt arra jutunk, hogy

$$\psi(t) = A \cos \sqrt{\lambda}\, t + B \sin \sqrt{\lambda}\, t,$$

az A és B integrálási állandókkal, másrészt φ-nek ki kell elégítenie a

$$\sigma \Delta \varphi + \lambda \mu \varphi = 0 \qquad \text{(a } D \text{ tartományban)}$$

differenciálegyenletet és a

$$\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} + p \varphi = 0 \qquad \text{(az } L \text{ görbe pontjaiban)}$$

kerületi feltételt.

A sajátértékek azok a λ értékek, melyek mellett a fenti differenciálegyenletnek van olyan φ megoldása, mely kielégíti az előírt kerületi feltételt. Egy ilyen megoldást nevezünk sajátfüggvénynek, melyre kikötjük még a

$$\iint_D \mu \varphi^2 \, dx \, dy = 1$$

normálási feltételt.

Hogy $\lambda > 0$, az belátható abból, hogy

$$\lambda = \sigma \iint_D \left\{ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 \right\} dx \, dy - \sigma \int_L \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, ds =$$

$$= \sigma \iint_D \left\{ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 \right\} dx \, dy + \int_L p \varphi^2 \, ds,$$

ahol $\sigma > 0$, $p > 0$.

Az itt tárgyalt sajátérték-sajátfüggvény problémát megfogalmazhatjuk úgy is, mint egy izoperimetrikus problémát: Keressük azt a kétszer differenciálható $\varphi = \varphi(x,y)$ függvényt, melynél az

$$I\langle\varphi\rangle = \sigma \iint_D \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy + \int_L p\varphi^2\,ds$$

funkcionál extrémum, és amely kielégíti a

$$\iint_D \mu\,\varphi^2\,dx\,dy = 1$$

mellékfeltételt.

Megjegyezzük még azt, hogy ha speciálisan $p(s) = 0$ az L görbe pontjaiban, akkor a φ által kielégítendő kerületi feltétel:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \qquad \text{(az } L \text{ görbe pontjaiban).}$$

Összefoglalva: Ha $p(s) \geqq 0$, akkor a kerületi feltétel:

$$\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial n} + p\varphi = 0 \qquad \text{(az } L \text{ görbe pontjaiban).}$$

e) Tetszőleges függvénynek a sajátfüggvények szerinti sorbafejtése

Mindenekelőtt kimutatjuk azt, hogy a rezgő membrán problémájához tartozó φ sajátfüggvények ortogonális és normált rendszert képeznek a $\mu = \mu(x, y)$ súlyfüggvény mellett.

A

$$\iint_D \mu\,\varphi^2\,dx\,dy = 1$$

normálási feltétel nyilván teljesül, hiszen ezt mint mellékfeltételt kikötöttük a sajátfüggvények meghatározásánál. Tehát csak azt kell kimutatnunk, hogy

$$\iint_D \mu\,\varphi_i\,\varphi_j\,dx\,dy = 0, \qquad \text{ha } i \neq j,$$

ahol φ_i és φ_j két lineárisan független sajátfüggvény, melyek a megfelelő λ_i és λ_j sajátértékekhez tartoznak (feltesszük azt, hogy $\lambda_i \neq \lambda_j$).

Először is:

$$\sigma\,\Delta\varphi_i + \lambda_i\mu\,\varphi_i = 0, \qquad \sigma\,\Delta\varphi_j + \lambda_j\mu\,\varphi_j = 0 \qquad \text{(a } D \text{ tartományban);}$$

másodszor pedig:

ha a membrán kerületi pontjai rögzítettek:

$$\varphi_i = \varphi_j = 0 \qquad \text{(az } L \text{ görbe pontjaiban),}$$

ha a membrán kerületi pontjai rugalmasan vannak megfogva (vagy szabadok, ha $p = 0$):

$$\sigma\frac{\partial\varphi_i}{\partial n} + p\varphi_i = 0, \qquad \sigma\frac{\partial\varphi_j}{\partial n} + p\,\varphi_j = 0 \qquad \text{(az } L \text{ görbe pontjaiban).}$$

Green tételét alkalmazva, írhatjuk:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \iint_D \mu \varphi_i \varphi_j \, dx \, dy =$$

$$= \sigma \iint_D (\varphi_i \Delta\varphi_j - \varphi_j \Delta\varphi_i) \, dx \, dy = \sigma \int_L \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) ds = 0,$$

mind a rögzített, mind a rugalmasan megfogott kerületi pontokkal bíró membrán esetében (a kerületi feltételek következtében). Mivel pedig $\lambda_i \neq \lambda_j$, ez csak úgy lehet, ha

$$\iint_D \mu \varphi_i \varphi_j \, dx \, dy = 0.$$

(Még megjegyezzük azt, hogy elfajuló esetben lehetnek a feladatnak olyan sajátértékei is, amelyekhez egynél több lineárisan független sajátfüggvény tartozik. Ez esetben az ún. Schmidt-féle ortogonalizálási eljárással el lehet érni, hogy ezek a többszörös sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények is ortogonális és normált rendszert képezzenek.)

Összefoglalva írhatjuk, hogy

$$\iint_D \mu \varphi_i \varphi_j \, dx \, dy = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

Ha most $g(x, y)$ egy a D tartományban értelmezett olyan korlátos függvény, mely a D tartomány véges számú résztartományában folytonosan deriválható, akkor

$$g(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \varphi_m(x, y), \quad \text{ahol} \quad c_m = \iint_D \mu \varphi_m g \, dx \, dy.$$

Ez a sor egyenletesen konvergál $g(x, y)$-hoz mindenütt, ahol $g(x, y)$ folytonos. Hasonlóan mindenütt, ahol g'_x, illetve g'_y folytonos, fennáll:

$$g'_x = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}, \quad \text{illetve} \quad g'_y = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}.$$

f) A rezgő membrán problémájának általános megoldása

Az előző pontban foglalt eredmények alapján elő tudjuk állítani a rezgő membrán

$$\sigma \Delta u = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

differenciálegyenletének az általános megoldását.

Vizsgáljuk csak azt az esetet, amikor a membrán kerületi pontjai rugalmasan vannak megfogva az L görbe mentén, vagyis amikor

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial n} + pu = 0 \qquad \text{(az } L \text{ görbe pontjaiban)}$$

a kielégítendő kerületi feltétel, ahol $p = p(s)$ megadott pozitív függvény.

Feltesszük azt, hogy a problémánkhoz tartozó sajátérték—sajátfüggvény probléma megoldása ismeretes; azaz ismerjük az összes λ_m sajátértékeket és az ezeknek megfelelő ortonormált φ_m sajátfüggvényeket, amelyek kielégítik a

$$\sigma \Delta\varphi_m + \lambda_m \mu \varphi_m = 0 \qquad \text{(a } D \text{ tartományban)}$$

$$\sigma \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} + p\varphi_m = 0 \qquad \text{(az } L \text{ görbe pontjaiban)}$$

egyenleteket, ahol $m = 1, 2, 3, \ldots$

Legyen

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \varphi_m(x, y); \qquad u'(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m \varphi_m(x, y),$$

ahol

$$c_m = c_m(t) = \iint_D \mu \varphi_m u \, dx \, dy; \quad d_m = d_m(t) = \iint_D \mu \varphi_m \frac{\partial u}{\partial t} \, dx \, dy.$$

Nyilvánvaló, hogy $d_m = c_m'$, azaz

$$u_t'(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m' \varphi_m(x, y).$$

Továbbá

$$u_x' = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}; \quad u_y' = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}.$$

A Hamilton-féle elvből következik, hogy a membrán mozgását leíró $u(x, y, t)$ függvény az a függvény, mely az

$$I\langle u \rangle = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_D \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \sigma \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \right] dx \, dy - \int p u^2 \, ds \right\} dt$$

integrál extrémumát adja. Ha most az itt szereplő u és parciális deriváltjainak négyzeteiben az egyik tényezőt a fenti végtelen sorokkal helyettesítjük, azt kapjuk, hogy

$$I = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ c_m \iint_D \mu \varphi_m \frac{\partial u}{\partial t} \, dx \, dy - c_m \left[\sigma \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \right) dx \, dy + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \int_l p u \varphi_m \, ds \right] \right\} dt.$$

A második integrált Green tétele alapján átalakítjuk:

$$\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_L u \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} \, ds - \iint_D u \Delta\varphi_m \, dx \, dy.$$

Ezzel pedig:

$$I = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \dot{c}_m^2 + c_m \left[\sigma \iint_D u \, \Delta\varphi_m \, dx \, dy - \int_L u \left(\sigma \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} + p \, \varphi_m \right) ds \right] \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \dot{c}_m^2 - c_m \lambda_m \iint_D \mu \, \varphi_m \, u \, dx \, dy \right\} dt = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{c}_m^2 - \lambda_m c_m^2) \, dt.$$

Ezzel az $I\langle u \rangle = \textit{extrémum}$ problémát visszavezettük az

$$I\langle c_m \rangle = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{c}_m^2 - \lambda_m c_m^2) \, dt = \textit{extrémum}$$

problémára. Ennek a megoldása pedig — amint a rezgő húr problémájánál is láttuk —

$$c_m = A_m \cos \sqrt{\lambda_m} \, t + B_m \sin \sqrt{\lambda_m} \, t, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

ahol A_m és B_m integrálási állandók.

Így végeredményben a rezgő membrán problémájának az általános megoldása:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos \sqrt{\lambda_m} \, t + B_m \sin \sqrt{\lambda_m} \, t) \, \varphi_m(x, y).$$

Az A_m és B_m állandók értékét adott esetben előírt kezdeti feltételek alapján kell meghatározni.

g) A membrán saját értékeinek egy minimum-tulajdonsága

Tegyük fel, hogy a rezgő membrán problémájához tartozó sajátértékek nagyság szerint növekvő sorozata:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$$

A rezgő húrral kapcsolatban mondottakhoz hasonlóan:

A k-adik λ_k sajátérték az

$$I\langle \varphi \rangle = \sigma \iint_D \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx \, dy + \int_L p \, \varphi^2 \, ds$$

integrál minimuma, ahol a konkurrenciába bocsátott φ függvények eleget tesznek a

$$\iint_D \mu \, \varphi^2 \, dx \, dy = 1$$

normálási és a

$$\iint_D \mu \, \varphi_m \, \varphi \, dx \, dy = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, k - 1$$

ortogonalitási feltételnek; ahol φ_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ a

$$\sigma \Delta\varphi_m + \lambda_m \mu \varphi_m = 0 \qquad \text{(a } D \text{ tartományban)}$$

$$\sigma \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} + p \varphi_m = 0 \qquad \text{(az } L \text{ görbe pontjaiban)} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

egyenleteket kielégítő sajátfüggvényeket jelenti.

$$\lambda_k \text{ az } I\langle\varphi\rangle \text{ minimuma, ha } \varphi = \varphi_k .$$

Ez a fontos tétel, melynek bizonyítása ugyanúgy történhet, mint a rezgő húrnál tárgyalt probléma esetében, lehetőséget nyújt arra, hogy az adott kerületérték feladat sajátértékeit a variációszámítás direkt közelítő módszereivel (pl. Ritz-féle eljárás) meghatározzuk.

7. §. A RITZ-FÉLE ELJÁRÁS

a) **A Ritz-féle eljárás**

A fizika és a műszaki tudományok különböző területeihez tartozó olyan feladatok gyakorlati tárgyalása, amely variációs feladatok formájában fogalmazható meg, általában azt a sokszor igen komoly nehézséget támasztja, hogy meg kell oldani a feladathoz tartozó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenletet és a kapott megoldásokból ki kell választani az előírt kerületi feltételeket is kielégítő megoldást. Ez az út — sajnos — általában csak a legegyszerűbb esetekben vezet eredményre. Felmerülhet az a gondolat, hogy alkalmazzunk valamilyen közelítő módszert a differenciálegyenlet megoldására. Azonban más úton is célt érhetünk. Mégpedig olyan módon, hogy nem az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet közvetítésével keressük meg a megoldást, hanem a variációszámítás ún. *direkt módszerei* közül alkalmazzuk valamelyiket. Ezek között a legismertebb az ún. Ritz-féle eljárás.

Ezt az eljárást sokszor olyan esetekben is szokás alkalmazni, amikor a feladat nem is variációs feladat, hanem valamilyen differenciálegyenlet adott kerületi feltételeket kielégítő megoldásának megkeresése. Ilyenkor természetesen először a variációszámítás inverz feladatát kell megoldani, ami abban áll, hogy az adott differenciálegyenletet egy egyelőre ismeretlen variációs feladat Euler—Lagrange-féle differenciálegyenletének tekintjük és megkeressük a hozzá tartozó variációs problémát.

A következőkben a Ritz-féle eljárást a legegyszerűbb variációs feladattal kapcsolatban világítjuk meg.

Tegyük fel, az a feladatunk, hogy meghatározzuk azt az

$$y(x_1) = y_1, \qquad y(x_2) = y_2$$

kerületi feltételeket kielégítő $y = y(x)$ függvényt, amelyik az

$$I\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$$

integrál extrémumát adja.

Fölmerülhet az a gondolat, hogy — ugyanúgy, mint a differenciál- és integrálegyenleteknél is szokásos — határozzuk meg a keresett $y(x)$ függvényt függvénysor alakjában. Itt azonban nem kötünk ki amellett, hogy ez a függvénysor pl. hatványsor vagy Fourier-sor legyen, hanem tetszőleges függvénysort választhatunk, azzal a kikötéssel, hogy a függvénysor egyes tagjai olyan függvények legyenek, amelyek kielégítik az előírt kerületi feltételeket, és legalább azoknak a folytonossági és differenciálhatósági feltételeknek tegyenek eleget, amelyeket a meghatározandó $y(x)$-re is kikötünk.

Legyenek pl. az előbb említett feltételeknek eleget tevő, egyébként tetszőleges függvények:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x).$$

Keressük a feladat megoldását az

$$y_n(x) = c_1\,\varphi_1(x) + c_2\,\varphi_2(x) + \ldots + c_n\,\varphi_n(x)$$

összeg alakjában, ahol $c_1, c_2, \ldots, c_n$ egyelőre ismeretlen állandók, a $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ függvények pedig a fentiek szerint általunk megválasztott függvények.

Ha most ezt az $y_n(x)$ kísérleti függvényt $y(x)$ helyébe helyettesítjük, akkor az $I\langle y\rangle$ integrál nyilván a c_i paraméterek függvénye lesz:

$$I(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_n(x), y_n'(x))\,dx.$$

Ahhoz, hogy a c_i állandókat úgy válasszuk meg, hogy I extrémum legyen, az szükséges, hogy I-nek valamennyi c_i szerint vett parciális deriváltja zérus legyen, azaz

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = 0, \qquad \frac{\partial I}{\partial c_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial I}{\partial c_n} = 0.$$

Ebből az n egyenletből kell az n darab c_i állandót meghatározni. Az ezekkel felírt $y_n(x)$ mármost a keresett $y(x)$ függvénynek egy közelítése.

Az eljárással kapcsolatban természetesen felmerül a közelítés hibájának megbecslésére vonatkozó igény, továbbá az a kérdés, hogy vajon növekvő n esetén az $y_n(x)$ közelítések konvergálnak-e a variációs feladat egzakt megoldásához. Ezekkel a fontos kérdésekkel itt nem foglalkozunk, csak utalunk az irodalomra. (Pl. *L. V. Kantorovics—V. J. Krülov:* A felsőbb analízis közelítő módszerei; *L. Collatz:* Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen.)

b) Példák

1. Tekintsük a következő izoperimetrikus feladatot:

Legyen

$$\int_0^1 y'^2(x)\,dx = \textit{extrémum},$$

az

$$\int_0^1 y^2(x)\,dx = 1,$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

feltételek mellett.

A Lagrange-féle multiplikátor módszerével ezt így is fogalmazhatjuk:

Legyen

$$F\langle y\rangle = \int_0^1 (y'^2 - \lambda^2 y^2)\,dx = \textit{extrémum},$$

az adott kerületi feltételek mellett.

Válasszuk a következő — $x = 0$-nál és $x = 1$-nél zérus értékű — függvényeket:

$$\varphi_1(x) = x(x-1),\ \varphi_2(x) = x^2(x-1).$$

Ezekkel

$$y_2(x) = c_1 x(x-1) + c_2 x^2(x-1),$$

és

$$F(c_1, c_2) = \int_0^1 (y_2'^2 - \lambda^2 y_2^2)\, dx = \frac{1}{3} c_1^2 + \frac{2}{15} c_2^2 +$$

$$+ \frac{1}{3} c_1 c_2 - \lambda^2 \left(\frac{1}{30} c_1^2 + \frac{1}{105} c_2^2 + \frac{1}{30} c_1 c_2 \right).$$

Az F = *extrémum* szükséges feltétele az, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial c_1} = c_1 \left(\frac{2}{3} - \frac{\lambda^2}{15} \right) + c_2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\lambda^2}{30} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial c_2} = c_1 \left(\frac{1}{3} - \frac{\lambda^2}{30} \right) + c_2 \left(\frac{4}{15} - \frac{2\lambda^2}{105} \right) = 0$$

egyen. Ez pedig egy homogén lineáris egyenletrendszer a c_1 és c_2 ismeretlenekre. Csupa zérustól különböző megoldás feltétele, hogy az egyenletrendszer determinánsa zérus legyen, azaz

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \frac{\lambda^2}{15} & \frac{1}{3} - \frac{\lambda^2}{30} \\ \frac{1}{3} - \frac{\lambda^2}{30} & \frac{4}{15} - \frac{2\lambda^2}{105} \end{vmatrix} = \frac{\lambda^4 - 52\lambda^2 + 420}{6300} = 0,$$

ahonnan következik:

$$\lambda_1^2 = 10,\ \lambda_2^2 = 42.$$

Pl. a $\lambda_1^2 = 10$ mellett $c_2 = 0$, c_1 tetszőleges, tehát

$$y_2(x) = c_1(x^2 - x).$$

c_1 értékét abból a feltételből határozzuk meg, hogy

$$\int_0^1 y_2^2\, dx = 1$$

kell hogy legyen. Ebből

$$c_1 = \pm 5{,}48,$$

és így

$$y_2(x) = \pm 5{,}48\,(x^2 - x).$$

A közelítés pontosságát itt könnyű megbecsülni, mert a feladat más úton is egzaktan megoldható. A feladathoz tartozó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet ugyanis a következő:

$$y'' + \lambda^2 y = 0.$$

Így a feladat első két sajátértéke:

$$\lambda_1^2 = \pi^2 = 9{,}87, \quad \lambda_2^2 = 4\pi^2 = 39{,}48.$$

A λ_1^2-hez tartozó normált sajátfüggvény:

$$y = \sqrt{2} \sin \pi x.$$

2. A 6. §-ban tárgyalt rezgő membrán problémájával kapcsolatos a következő kerületérték-probléma:

Oldjuk meg a

$$\Delta\varphi + \lambda \varphi = 0$$

differenciálegyenletet a

$$\varphi = 0 \qquad \text{(az } L \text{ görbe pontjaiban)}$$

kerületi feltétel mellett.

(Speciálisan választottuk a feszültséget és a tömegeloszlás sűrűségét egységnyinek: $\sigma = 1$, $\mu = 1$.)

Ez a differenciálegyenlet az

$$I\langle\varphi\rangle = \iint_T \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - \lambda \varphi^2 \right\} dx\, dy = \textit{extrémum}$$

variációs feladathoz tartozó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet.

Tegyük fel, hogy a T tartományt határoló L görbe egy egységsugarú kör.

Válasszuk kísérletképpen a következő — az L görbe pontjaiban 0 értékű — függvényt:

$$\varphi_1(x, y) = c(x^2 + y^2 - 1).$$

Ezzel az előbbi integrál:

$$I(c) = \iint_T \{4c^2 x^2 + 4c^2 y^2 - \lambda c^2 (x^2 + y^2 - 1)^2\}\, dx\, dy =$$

$$= 4c^2 \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\, dr\, d\varphi - \lambda c^2 \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2 - 1)^2 r\, dr\, d\varphi.$$

Tehát

$$I(c) = 2c^2 \pi - \lambda c^2 \frac{\pi}{3}.$$

Az extrémum szükséges feltétele, hogy $\frac{\partial I}{\partial c} = 0$ legyen, azaz

$$4c\pi - \frac{2}{3} c \lambda \pi = 0,$$

ahonnan

$$\lambda = 6.$$

Pontos számítással $\lambda = 2{,}4^2 = 5{,}76$ adódott volna.

3. A rugalmas lemezek állandó terheléshez tartozó egyensúlyi alakjának meghatározása a következő variációs feladatra vezet:

$$I\langle u\rangle = \iint_T \left[\frac{(\Delta u)^2}{2} - (1-\nu)\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)\right\} - \frac{p\,u}{N}\right] dx\,dy$$

legyen extrémum, megadott kerületi feltételt kielégítő $u(x, y)$ függvény esetén. Itt u jelenti a lemez egyes pontjainak az (x, y) síktól merőlegesen mért távolságát az egyensúlyi helyzetben; $\nu = \frac{1}{m}$ a Poisson-féle szám reciproka; p a lemez területegységére ható terhelés; N pedig egy a lemez vastagságától, a rugalmassági modulusztól és a Poisson-féle számtól függő állandó. (Megjegyezzük még azt, hogy az integrál állandó szorzóját elhagytuk.)

Az ehhez a feladathoz tartozó Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet:

$$\Delta\,\Delta u = \frac{p}{N}.$$

Tekintsünk speciálisan egy egyenletesen terhelt, a oldalú négyzet alakú lemezt az $u = 0$, $\Delta u = 0$ kerületi feltételekkel (kerületen támasztás). Egy, a kerületi feltételeket is kielégítő kísérleti függvény legyen:

$$u_1 = f \sin\frac{\pi x}{a} - \sin\frac{\pi y}{a}.$$

Ezzel

$$I(f) = \frac{\pi^4}{2a^2} f^2 - \frac{4a^2 p}{\pi^2 N} f.$$

f meghatározható a

$$\frac{\partial I}{\partial f} = 0$$

feltételből:

$$\frac{\pi^4}{a^2} f - \frac{4a^2 p}{\pi^2 N} = 0,$$

ahonnan — az egzakt eredménnyel egyezően:

$$f = \frac{4a^4 p}{\pi^6 N}.$$

Ez az f jelenti egyébként a lemez legnagyobb behajlását az adott terhelés esetén

FÜGGELÉK

A VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS NÉHÁNY NEVEZETES PROBLÉMÁJA

Az alábbiakban, az eddig tárgyalt problémák kiegészítéseként felsorolunk néhányat a variációszámítás — történetileg érdekes és nevezetes — problémái közül.

1. Meghatározandó annak a forgástestnek a meridiángörbéje, amelyiknek folyadékba merítés esetén a legkisebb az ellenállása *(Newton problémája)*.

2. Meghatározandó az a két adott pontot összekötő görbe, amelynek befutásakor egy súlyos anyagi pont a végpontban maximális végsebességet ér el *(Lagrange)*.

3. Meghatározandó az a két adott pontot összekötő görbe, melynél a görbe, az evolutája és a két végponthoz tartozó normális a legkisebb területet zárja be *(Euler)*.

4. Meghatározandó az a két adott pontot összekötő görbe, melynek az egyik koordináta-tengely körüli megforgatásával származó forgástest térfogata a legnagyobb, ha a palástfelszín előre megadott, állandó *(Lindelöf)*.

5. Meghatározandó az a két adott ponton átmenő és adott területet bezáró görbe, amelynek egy tengely körüli megforgatásával származó forgásfelület felszíne a legkisebb *(Euler)*.

6. Mindazon görbék közül, melyek két adott ponton mennek át, és adott az ívhosszúságuk, határozzuk meg azt, amelyiknek egy tengely körüli megforgatásával a legnagyobb térfogatú forgástest származik *(Euler)*.

7. Melyik az az adott felszínű felület, amely a legnagyobb térfogatú térrészt zárja körül? *(Sarrus)*.

8. Meghatározandó az a két adott pontot összekötő görbeív, amelyiknek egy adott pontra vonatkozó másodrendű nyomatéka maximális, illetve minimális *(Euler, Bonnet)*.

9. Meghatározandó az a legnagyobb, illetve legkisebb ívhosszúságú görbe melynek a görbülete állandó és a végpontjai két adott görbén vagy felületen fekszenek *(Delaunay)*.

IRODALOMJEGYZÉK

1. *M. A. Lavrentyev—L. A. Ljusztyernyik:* Variációszámítás. (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.)
2. *O. Bolza:* Vorlesungen über Variationsrechnung. (Koehler & Amelang, Leipzig, 1949.)
3. *B. Baule:* Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Band V.: Variationsrechnung. (S. Hirzel, Leipzig, 1950.)
4. *G. Grüss:* Variationsrechnung. (Quelle & Meyer, Leipzig, 1938.)
5. *R. Weinstock:* Calculus of variations. (McGraw-Hill, New York—Toronto—London, 1952.)
6. *R. Courant—D. Hilbert:* Methoden der mathematischen Physik I—II. (J. Springer, Berlin, 1931.)
7. *L. E. Elsholz:* Variationsrechnung (in: Grosse Sowjet-Enzyklopädie; B. G. Teubner, Leipzig, 1954).
8. *F. Schwank:* Randwertprobleme. (B. G. Teubner, Leipzig, 1951.)
9. *W. Hort—A. Thoma:* Die Differentialgleichungen der Technik und Physik. (J. A. Barth, Leipzig, 1950.)
10. *L. Collatz:* Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. (Akad. Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1949.)
11. *L. V. Kantorovics—V. I. Krülov:* A felsőbb analízis közelítő módszerei. (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.)
12. *L. A. Ljusternik—W. I. Sobolew:* Elemente der Funktionalanalysis. (Akademie Verlag, Berlin, 1955.)
13. *Budó Á.:* Mechanika. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1953.)
14. *A. Sommerfeld:* Mechanik. (Akad. Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1949.)
15. *G. Joos:* Lehrbuch der theoretischen Physik. (Akad. Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1950.)
16. *G. Joos—Th. Kaluza:* Höhere Mathematik für den Praktiker. (J. A. Barth, Leipzig, 1952.)
17. *N. M. Gjunter—R. O. Kuzmin:* Felsőbb matematikai példatár. III. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.)

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés

a) A variációszámítás tárgya és feladata 9
b) Néhány egyszerűbb variációs feladat 10
c) Variációs feladatok általános megfogalmazása 12

1. §. A legegyszerűbb variációs feladatok megoldása

a) A variációszámítás alaplemmája 14
b) Az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet 15
c) Szokásos elnevezések 17
d) Az Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet első integrálja bizonyos speciális esetekben 18
e) Példák 21
f) Több függő változó esete 24
g) Változtatható kerületi pontok 25

2. §. Az izoperimetrikus probléma

a) Az egyszerű és az általánosított izoperimetrikus probléma megoldása 29
b) Példák 31
c) Variációs feladatok, egyenletek, illetve differenciálegyenletek formájában megadott mellékfeltételekkel 35
d) Alkalmazás az alkotófüggvényben elsőnél magasabbrendű deriváltat is tartalmazó variációs feladatok megoldására 35
e) Példák 36

3. §. Alkalmazás a geometriai optikában: a Fermat-féle elv

a) A fénytörésre vonatkozó Snellius- és Descartes-féle törvény mint a Fermat-féle elv következménye 39
b) A Fermat-féle elvnek és a variációszámításnak egyik kapcsolata 41

4. §. Alkalmazás a pontrendszerek mechanikájában

a) Hamilton elve 43
b) Generalizált koordináták 46
c) A Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek konzervatív holonom rendszereknél 47
d) A Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek nem konzervatív holonom rendszereknél 47
e) A Hamilton-féle kanonikus egyenletek 48
f) Kanonikus transzformációk 51
g) A Hamilton—Jacobi-féle parciális differenciálegyenlet 52

5. §. Két független változó: a rezgő húr problémája

a) Kettős integrálok extrémuma 54
b) A rezgő húr problémája 56
c) A rezgő húrral kapcsolatos sajátérték-sajátfüggvény probléma 58
d) Tetszőleges függvénynek a sajátfüggvények szerinti sorbafejtése 60
e) A sajátérték-sajátfüggvény probléma egy minimum tulajdonsága 61
f) A rezgő húr differenciálegyenletének általános megoldása 63

6. §. Több független változó: a rezgő membrán

a) Többes integrálok extrémizálása 65
b) A rezgő membrán problémája 67
c) A rezgő membránhoz tartozó sajátérték-sajátfüggvény probléma 69
d) A kerületén rugalmasan megfogott membrán esete 71
e) Tetszőleges függvénynek a sajátfüggvények szerinti sorbafejtése 75
f) A rezgő membrán problémájának általános megoldása 76
g) A membrán saját értékeinek egy minimum-tulajdonsága 78

7. §. A Ritz-féle eljárás

a) A Ritz-féle eljárás 80
b) Példák 81

Függelék

A variációszámítás néhány nevezetes problémája 85
Irodalomjegyzék 86

Raktári szám: 44 331/II

Tankönyvkiadó Vállalat
A kiadásért felelős: Vágvölgyi Tibor igazgató
Felelős szerkesztő: Ambrus Ferenc
Műszaki vezető: Hámori József
Műszaki szerkesztő: Rácz Sándorné
A kézirat nyomdába érkezett: 1969. március. Megjelent: 1969. május
Példányszám: 1000. Terjedelem: 7,7 (A/5) iv
Készült: az 1966. évi második kiadás alapján könyvből fotózva,
rotaprint eljárással, az MSZ 5601-59 és az MSZ 5602-55 szabvány szerint

69-442 - Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest